$$\forall i \in N_n \setminus I^n(t, t^o, B) \ (\tau_i(t, t^o, A_i+A_i', B_i)=0).$$

Поэтому согласно (6) вновь получаем $t^o \notin P^n(A+A', B)$. Резюмируя сказанное, выводим $\rho^n(t^o, A, B)<\varphi$.

Теорема доказана.

Положим

$$S^n(A, B)=\{t^o \in T. \ T \neq T^n(t^o) \ \& \ \sigma(t^o, A, B)=\varnothing\},$$

где $\sigma(t^o, A, B)=\{t \in T \setminus T^n(t^o): \tau(t^o, t, A, B) \geq 0_{(n)}\}$.

Следствие. Подстановка $t^o \in P^n(A, B)$, $n>1$, устойчива тогда и только тогда, когда либо $T=T^n(t^o)$, либо $t^o \in S^n(A, B)$.

Отсюда следует, что оптимальная подстановка $t^o \in P^1(A, B)$ скалярной задачи $Z^1(A, B)$ устойчива тогда и только тогда, когда $P^1(A. B)=T^1(t^o)$. В частности, оптимальная подстановка t^o устойчива, если $P^1(A, B)=\{t^o\}$. Обратное, вообще говоря, неверно.

В заключение отметим, что из нашей теоремы легко вытекает также формула радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(A, B)$, $n \geq 1$, полученная ранее в [7] для случая, когда в каждой строке матрицы B элементы попарно различны, поскольку такой радиус равен величине

$$\min\{\rho^n(t^o, A, B): \ t^o \in P^n(A, B)\}$$

при выполнении условия

$$\forall t^o \in P^n(A, B) \ \forall t \in T \setminus \{t^o\} \ (T^n(t^o)=\{t^o\} \ \& \ I^n(t, t^o, B)=N_n).$$

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект Ф97-266).

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
2. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.
3. Емеличев В.А., Супруненко Д.А., Танаев В.С. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. № 6. С. 25.
4. Емеличев В.А., Гирлих Э., Подкопаев Д.П. // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 1996. № 3. С. 5.
5. Емеличев В.А., Кричко В.Н. // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 1998. № 3. С. 81.
6. Бердышева Р.А., Емеличев В.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1998. № 1. С. 43.
7. Емеличев В.А., Похилько В.Г. // Там же. 1999. № 3. С. 45.

Поступила в редакцию 25.02.2000

Емеличев Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук.
Похилько Вячеслав Геннадьевич – аспирант. Научный руководитель В.А. Емеличев.

УДК 519.24

Н.Н. ДЕМЕШ, М.А. АКИНФИНА

О ДИСПЕРСИИ СГЛАЖЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ БАРТЛЕТТА

In the present paper the smoothed periodogram of Bartlet as the auxiliary estimate of spectral density of symmetric stationary α-stable process is being studied. Asymptotic and statistic properties of dispersion of the estimate were obtained.

Рассмотрим дискретный устойчивый симметричный стационарный случайный процесс $X(t)$, $t \in Z=\{0, \pm 1, \ldots\}$, с характеристическим показателем α, $0<\alpha<2$, допускающий спектральное представление вида

$$X(t)=\int_{\Pi} e^{it\lambda} dz(\lambda), \qquad (1)$$

где $z(\lambda)$ – комплекснозначный устойчивый случайный процесс с независимыми приращениями, с характеристическим показателем α, равным характеристическому показателю процесса (1), и такой, что $\left\{M|dz(\lambda)|^p\right\}^{\alpha/p}=$

$=\mathrm{const}(p,\alpha)f(\lambda)\,d\lambda$, для $0<p<\alpha<2$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\ \pi]$, причем $\mathrm{const}(p,\alpha)$ зависит только от p и α, а функцию $f(\lambda)$ по аналогии с работой [1] будем называть спектральной плотностью.

Пусть $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(T)$–$T = L\times M$-последовательных наблюдений за процессом (1), которые разбиты на L равных непересекающихся отрезков длины M.

В качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$ исследуем статистику

$$\varphi_T(\lambda)=\left[\hat{f}_T(\lambda)\right]^{\frac{\alpha}{p}},\ 0<p<\alpha/2, \tag{2}$$

где функция $\hat{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, представляет собой оценку типа сглаженной периодограммы и имеет вид

$$\hat{f}_T(\lambda)=\int_{\Pi}W_T(\upsilon)\bar{f}_T(\lambda+\upsilon)\,d\upsilon, \tag{3}$$

где $\bar{f}_T(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}I'_M(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ – периодограмма Бартлетта, а $I'_M(\lambda)$ – модифицированная периодограмма, построенная по наблюдениям l-го интервала, $l=\overline{1,L}$. $W_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ – спектральное окно, для которого выполнено следующее:

1) $W_T(\lambda)$ – неотрицательная, четная, 2π-периодическая функция; (4)

2) $\int_{\Pi}W_T(\lambda)d\lambda=1$; (5)

3) $\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}W_T(\lambda)d\lambda=1.\quad 0<\delta<\pi.$ (6)

Причем будем предполагать, что функцию $W_T(\lambda)$ можно представить в виде

$$W_T(\lambda)=M_TW(M_T\lambda), \tag{7}$$

где

$$M_T\xrightarrow[T\to\infty]{}\infty,\quad \frac{M_T}{T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0, \tag{8}$$

а $W(\lambda)$ – неотрицательная, четная, непрерывная функция, для которой выполняется:

1) $W(\lambda)=0$ при $|\lambda|>1$;

2) $\int_{-1}^{1}W(\lambda)d\lambda=1$.

Статистика $\bar{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, была исследована в работах [2–4]. Показано, что она является асимптотически несмещенной и не является состоятельной оценкой спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$.

Цель сглаживания спектральными окнами – получить состоятельную оценку спектральной плотности [5].

Пусть
$$\psi_M(\lambda)=\int_{\Pi}\left|H_M(\lambda-\upsilon)\right|^{\alpha}f(\upsilon)d\upsilon, \tag{9}$$

$$H_M(\upsilon)=A_MH^{(M)}(\upsilon),\ A_M=\left[\int_{\Pi}\left|H^{(M)}(\upsilon)\right|^{\alpha}d\upsilon\right]^{-1/\alpha},\ H^{(M)}(\upsilon)=\sum_{t=1}^{M}e^{-i\upsilon t}h_M(t),$$

$h_M(t)$ – функция, называемая окном просмотра данных.

Лемма [1]. Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, непрерывна в точке $\lambda_0\in\Pi$ и ограничена на множестве Π. Тогда

$$\lim_{M\to\infty}\psi_M(\lambda_0)=f(\lambda_0),$$

где $\psi_M(\lambda)$ определена формулой (9), $0<p<\alpha<2$, λ, $\upsilon\in\Pi$.

Определение. Положительным ядром на множестве Π будем называть периодическую с периодом 2π последовательность непрерывных функций $F_M(x)$, $M = 1, 2, \ldots$, $x\in\Pi$, удовлетворяющую следующим условиям: $\int_{\Pi} F_M(x)dx = 1$, $M = 1, 2, \ldots$, $F_M\geq 0$; для любого $\delta>0$ $\lim\limits_{M\to\infty}\int_{\Pi\setminus\{|x|\leq\delta\}} F_M(x)dx = 0$.

Теорема 1. Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ случайного процесса $X(t)$, $t\in Z$, определенного формулой (1), непрерывна в точке $\lambda_0\in\Pi$, ограничена на множестве Π, а $|H_M(\lambda)|^{\alpha}$ является положительным ядром на Π. Тогда для математического ожидания статистики $\hat{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, заданной равенством (3), справедливы соотношения

$$M\hat{f}_T(\lambda_0) = \int_{\Pi} W_T(\upsilon)\{\psi_M(\lambda_0+\upsilon)\}^{p/\alpha}d\upsilon, \tag{10}$$

причем

$$\lim_{T\to\infty} M\hat{f}_T(\lambda_0) = [f(\lambda_0)]^{p/\alpha}, \tag{11}$$

где $\psi_M(\lambda)$ определяется соотношением (9), а $W_T(\lambda)$ удовлетворяет условиям (4–6), $0<p<\alpha<2$, $\lambda, \upsilon\in\Pi$.

Доказательство. Из свойств математического ожидания и теоремы 1 [2] вытекает соотношение (10).

Воспользовавшись неравенством $|a^q - b^q| \leq |a-b|^q$ при a, $b\geq 0$, $0<q<1$, леммой и свойствами функции $W_T(\lambda)$, получаем соотношение (11). Теорема доказана.

Положим

$$c_M^{(1)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2) = -c_\alpha\int_{\Pi}|u_1H_M(\lambda_1-\upsilon)+u_2H_M(\lambda_2-\upsilon)|^{\alpha}f(\upsilon)d\upsilon,$$

$$c_M^{(2)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2) = -c_\alpha\int_{\Pi}\left\{|u_1|^{\alpha}|H_M(\lambda_1-\upsilon)|^{\alpha}+|u_2|^{\alpha}|H_M(\lambda_2-\upsilon)|^{\alpha}\right\}f(\upsilon)d\upsilon,$$

$$c_M^{(3)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2) = -c_\alpha\int_{\Pi}\left|u_1H_M(\lambda_1-\upsilon)+u_2H_M(\lambda_2-\upsilon)e^{iM\upsilon}\right|^{\alpha}f(\upsilon)d\upsilon,$$

$$c_M^{(4)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2) = -c_\alpha\int_{\Pi}\left|u_1H_M(\lambda_1-\upsilon)e^{iM\upsilon}+u_2H_M(\lambda_2-\upsilon)\right|^{\alpha}f(\upsilon)d\upsilon,$$

$$K_1(\lambda_1, \lambda_2) = Q\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\left\{c_M^{(1)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2)\right\}-\exp\left\{c_M^{(2)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2)\right\}\right]\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}},$$

$$K_2(\lambda_1, \lambda_2) = Q\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\left\{c_M^{(3)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2)\right\}-\exp\left\{c_M^{(2)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2)\right\}\right]\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}},$$

$$K_3(\lambda_1, \lambda_2) = Q\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\left\{c_M^{(4)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2)\right\}-\exp\left\{c_M^{(2)}(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2)\right\}\right]\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}},$$

где $\psi_M(\lambda)$ и $H_M(\upsilon)$ определены выше, а Q и c_α определены в [2].

Теорема 2. Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ случайного процесса $X(t)$, $t\in Z$, определенного формулой (1), непрерывна в точке $\lambda_0\in\Pi$, ограничена на множестве Π, а для положительного ядра $|H_M(\lambda)|^{\alpha}$ выполняется условие

$$\int_{\Pi}\left|H_M\left(\lambda_0-\frac{x_1}{M_T}-\upsilon\right)H_M\left(\lambda_0-\frac{x_2}{M_T}-\upsilon\right)\right|^{\frac{\alpha}{2}}d\upsilon \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \tag{12}$$

$x_1,\ x_2 \in [-1,1]$, $|x_1-x_2|>\varepsilon_T>0$, $\varepsilon_T \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$. Тогда для дисперсии статистики $\hat{f}_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, заданной равенством (3), справедливы следующие соотношения

$$D\hat{f}_T(\lambda_0)=\frac{1}{L^2}\iint_{\Pi} W_T(\upsilon_1)W_T(\upsilon_2)\left[LK_1(\upsilon_1+\lambda_0,\ \upsilon_2+\lambda_0)+(L-1)K_2(\upsilon_1+\lambda_0,\ \upsilon_2+\lambda_0)+\right.$$
$$\left.+(L-1)K_3(\upsilon_1+\lambda_0,\ \upsilon_2+\lambda_0)\right]d\upsilon_1 d\upsilon_2, \tag{13}$$

$$D\hat{f}_T(\lambda_0)\xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \tag{14}$$

причем $$\left|D\hat{f}_T(\lambda_0)\right|\le \frac{2}{L}\left\{V_{p,\alpha}\left\{\psi_M(\lambda_0)\right\}^{2p/\alpha}\int_{-1}^{1}W^2(x)dx\times\varepsilon_T+C_1P_M\right\}, \tag{15}$$

где $$P_M=\max_{\substack{|x_1-x_2|>\varepsilon_T\\ x_1,\,x_2\in[-1,1]}}\int_{\Pi}\left|H_M\left(\lambda_0-\frac{x_1}{M_T}-\upsilon\right)H_M\left(\lambda_0-\frac{x_2}{M_T}-\upsilon\right)\right|^{\alpha/2}d\upsilon, \tag{16}$$

$$C_1=\frac{8p^2e\max\limits_{\upsilon\in\Pi}f(\upsilon)\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha^4\left\{\psi_M\left(\lambda_0-\frac{x_1}{M_T}\right)\psi_M\left(\lambda_0-\frac{x_2}{M_T}\right)\right\}^{\frac{1}{2}-\frac{p}{\alpha}}\Gamma^2\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)}, \tag{17}$$

$\psi_M(\lambda)$, $H_M(\upsilon)$, $K_1(\upsilon_1+\lambda_0,\ \upsilon_2+\lambda_0)$, $K_2(\upsilon_1+\lambda_0,\ \upsilon_2+\lambda_0)$ и $K_3(\upsilon_1+\lambda_0,\ \upsilon_2+\lambda_0)$ определены выше, а Q, $V_{p,\alpha}$ и c_α определены в [2], а $W_T(\lambda)$ и M_T удовлетворяют условиям соответственно (4–6) и (8), $\lambda_1,\ \lambda_2\in\Pi$, $0<p<\alpha/2$, $0<\alpha<2$.

Доказательство. Соотношение (13) вытекает из определения дисперсии и теоремы 3 [2].

Рассмотрим первое слагаемое в (13). Сделаем в нем замену переменных $M_T\upsilon_1=x_1$, $M_T\upsilon_2=x_2$ и учтем соотношение (7), тогда получим

$$I_1=\frac{1}{L}\int_{-M_T\pi}^{M_T\pi}\int_{-M_T\pi}^{M_T\pi}W(x_1)W(x_2)\operatorname{cov}\left\{I_M\left(\lambda_0+\frac{x_1}{M_T}\right),\ I_M\left(\lambda_0+\frac{x_2}{M_T}\right)\right\}dx_1dx_2=$$

$$=\frac{1}{L}\left\{\iint_{|x_1-x_2|\le\varepsilon_T}W(x_1)W(x_2)\operatorname{cov}\left\{I_M\left(\lambda_0+\frac{x_1}{M_T}\right),\ I_M\left(\lambda_0+\frac{x_2}{M_T}\right)\right\}dx_1dx_2+\right.$$

$$\left.+\iint_{|x_1-x_2|>\varepsilon_T}W(x_1)W(x_2)\operatorname{cov}\left\{I_M\left(\lambda_0+\frac{x_1}{M_T}\right),\ I_M\left(\lambda_0+\frac{x_2}{M_T}\right)\right\}dx_1dx_2\right\}=\frac{1}{L}(I_{11}+I_{12}). \tag{18}$$

Рассмотрим первое слагаемое в формуле (18). Применяя теорему о среднем для внутреннего интеграла, учитывая условия на ε_T и теорему 3.1 [1], можем записать

$$|I_{11}|<\int_{-1}^{1}W^2(x)DI_M(\lambda_0)dx\times\varepsilon_T=V_{p,\alpha}\left[\psi_M(\lambda_0)\right]^{2p/\alpha}\int_{-1}^{1}W^2(x)dx\times\varepsilon_T. \tag{19}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (18). Из [6] известно, что

$$\left|\operatorname{cov}\left\{I_M\left(\lambda_0+\frac{x_1}{M_T}\right),\ I_M\left(\lambda_0+\frac{x_2}{M_T}\right)\right\}\right|\le C_1\int_{\Pi}\left|H_M\left(\lambda_0-\frac{x_1}{M_T}-\upsilon\right)H_M\left(\lambda_0-\frac{x_2}{M_T}-\upsilon\right)\right|^{\alpha/2}d\upsilon, \tag{20}$$

где C_1 определено формулой (17).

Подставляя (20) в I_{12} и используя свойства $W(\lambda)$, получаем

$$|I_{12}|<C_1\iint_{|x_1-x_2|>\varepsilon_T}W(x_1)W(x_2)\int_{\Pi}\left|H_M\left(\lambda_0-\frac{x_1}{M_T}-\upsilon\right)H_M\left(\lambda_0-\frac{x_1}{M_T}-\upsilon\right)\right|^{\alpha/2}d\upsilon\, dx_1dx_2<$$

$$< C_1 \max_{\substack{|x_1-x_2|>\varepsilon_T \\ x_1,\, x_2\in[-1,1]}} \int_{\Pi} \left| H_M\left(\lambda_0 - \frac{x_1}{M_T} - \upsilon\right) H_M\left(\lambda_0 - \frac{x_1}{M_T} - \upsilon\right)\right|^{\alpha/2} d\upsilon \iint_{[-1,1]^2} W(x_1)W(x_2)dx_1dx_2 \le C_1 P_M . \quad (21)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (13). Сделаем замену переменных $M_T\upsilon_1=x_1$, $M_T\upsilon_2=x_2$ и учтем соотношение (7), тогда получим

$$I_2 = \frac{(L-1)}{L^2}\left\{ \iint_{|x_1-x_2|\le\varepsilon_T} W(x_1)W(x_2)\operatorname{cov}\left\{ I_M\left(\lambda_0 + \frac{x_1}{M_T}\right) I_M\left(\lambda_0 + \frac{x_2}{M_T}\right)\right\} dx_1dx_2 + \right.$$

$$\left. + \iint_{|x_1-x_2|>\varepsilon_T} W(x_1)W(x_2)\operatorname{cov}\left\{ I_M\left(\lambda_0 + \frac{x_1}{M_T}\right) I_M\left(\lambda_0 + \frac{x_2}{M_T}\right)\right\} dx_1dx_2 \right\} = \frac{(L-1)}{L^2}\{I_{21} + I_{22}\}. \quad (22)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (22). Аналогично, как для I_{11}, получим

$$|I_{21}| \le \int_{-1}^{1} W^2(x) DI'_M(\lambda_0)dx \times \varepsilon_T = V_{p,\alpha}\{\psi_M(\lambda_0)\}^{2p/\alpha} \int_{-1}^{1} W^2(x)\,dx \times \varepsilon_T . \quad (23)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (22). Из [2] известно, что

$$\left|\operatorname{cov}\left\{ I_M\left(\lambda_0 + \frac{x_1}{M_T}\right) I_M\left(\lambda_0 + \frac{x_2}{M_T}\right)\right\}\right| \le C_1 \int_{\Pi} \left| H_M\left(\lambda_0 - \frac{x_1}{M_T} - \upsilon\right) H_M\left(\lambda_0 - \frac{x_2}{M_T} - \upsilon\right)\right|^{\alpha/2} d\upsilon , \quad (24)$$

где C_1 определено формулой (17).

Подставляя (24) в I_{22} и проводя такие же операции, как для I_{12}, получим

$$|I_{22}| \le C_1 P_M . \quad (25)$$

Рассмотрим третье слагаемое в (13). Аналогично второму слагаемому будем иметь

$$|I_3| \le V_{p,\alpha}\{\psi_M(\lambda_0)\}^{2p/\alpha} \int_{-1}^{1} W^2(x)dx \times \varepsilon_T + C_1 P_M . \quad (26)$$

Подставляя (25), (23) в (22), (21), (19) в (18), а затем (26), (22), (18) в (13), приводя подобные слагаемые и учитывая, что $L>2$, получим соотношение (15). Учитывая условия на ε_T и (12), получим соотношение (14).

1. Masry E., Cambanis S. // Stochastic processes and their applications.1984. Vol. 18. P. 1.
2. Акинфина М.А. Мн., 1999. 26 с. Деп. в БелИСА. 16.06.99. № Д199971.
3. Акинфина М.А. // Сб. научных работ студентов и аспирантов. Мн., 1998. С. 12.
4. Акинфина М.А. // Сб. научных работ студентов и аспирантов. Мн., 1999. С. 20.
5. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М., 1980
6. Демеш Н.Н. Киев, 1988. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 88. 64.)

Поступила в редакцию 23.03.2000.

Демеш Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук.
Акинфина Марина Александровна – инженер-программист.

УДК 519.872

М.А. МАТАЛЫЦКИЙ, А.М. АСТАХОВ

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА СЕТИ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ И ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАЯВОК

Queueing networks with central server and one-type customers in stationary regime is investigated.

Сети массового обслуживания с центральной системой являются адекватными математическими моделями локальных вычислительных сетей, некоторых объектов в экономике и страховании [1, 2]. Рассмотрим замкнутую сеть, состоящую из центральной системы обслуживания (СМО) S_n и $(n-1)$ периферийных $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$; все системы однолинейные. После об-