

зафиксируем произвольный $t \in T$ и обозначим $B = \pi_t^{-1}(\pi_t(F)) \setminus U_2$. Если $B = \emptyset$, то $U_2 \supset \pi_t^{-1}(\pi_t(F))$, и вследствие замкнутости π_t найдется $V \subset L_t$ такое, что $\pi_t(F) \subset V$ и $\pi_t^{-1}(V) \subset U_2$. Тогда полагаем $G_2 = \Pi_t^{-1}(T_2(V))$. Если $B \neq \emptyset$, то $\pi_t^s(\pi_s(B)) \subset M_t$ при $s > t$, откуда следует компактность B . В силу леммы 3 существует $s \in T$: $\pi_s(F) \cap \pi_s(B) = \emptyset$. Но тогда $\pi_s^{-1}(\pi_s(F)) \subset U_2$, и далее действуем как в случае $B = \emptyset$. Доказательство завершено.

Следствием теоремы 2 является

Теорема 3. Канонический морфизм $H \cdot \exp L \rightarrow \Lambda$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда спектр S правильно ужимается до некоторого компактно ветвящегося спектра S' .

Для доказательства необходимости зафиксируем некоторый $t \in T$ и положим $K = \{s \in T \mid s > t\}$, $S' = S^0|_K$ и $\Phi_s = (\pi_t^{-1})^{-1}((M_t|_{X_s}) \cap L_s)$ для любого $s > t$. Для доказательства достаточности с помощью леммы 6 и утверждения 1 установим равенство $S' = S^0|_K$ и каноническую гомеоморфность $\Lambda \sim \varprojlim \exp(S^0|_K)$, затем применим теорему 2.

В заключение приведем пример. В дискретном пространстве $N \times \{1, 2\}$ (N – натуральный ряд) фиксируем подпространства $X_n = \{(m, 1), (k, 2) \mid m \in N, 1 < k < n\}$ и для $s > t$ ($t, s \in N$) положим $\pi_t^s((m, 1)) = (m, 1)$, $\pi_t^s((k, 2)) = (k, 2)$ при $t < k$ и $\pi_t^s((k, 2)) = (k, 1)$ при $t < k$. Обратная последовательность $S = \{X_n, \pi_t^s, M\}$ удовлетворяет всем условиям, наложенным на S в этой части, однако отображение H не является здесь гомеоморфизмом.

1. Segal J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 10. P. 706.
2. Сирота С. // ДАН СССР. 1968. Т. 181. С. 1069.
3. Zepp R. // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 26. P. 190.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.
5. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. М., 1988.
6. Flachmeyer J. // Math. Nachr. 1964. Bd. 26. S. 321.
7. Flachmeyer J. // Math. Nachr. 1979. Bd. 89. S. 51.
8. Кукрак Г. О. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 3. С. 56.

Поступила в редакцию. 24.12.99.

Кукрак Глеб Олегович – ассистент.

Тимохович Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук

УДК 517.968

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Б. Ф. ФАТУЛАЕВ

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ КРУГА И ДРОБНО- ЛИНЕЙНОГО СДВИГА КОНТУРА

On solution of the boundary value problem of the Carleman type for meta-analytic functions for disk and the linear-fractional homeomorphism of the contour.

Пусть $T^+ = \{z: |z| < 1\}$, а $L = \{t: |t| = 1\}$. В качестве положительного обхода контура L выберем тот, при котором область T^+ остается слева.

Напомним (см., напр., [2], с. 139), что функция $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ называется *метааналитической* в области T^+ , если она в этой области является регулярным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + a_1 \frac{\partial F(z)}{\partial z} + a_0 F(z) = 0, \quad (1)$$



где $\bar{z} = x - iy$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ – дифференциальный оператор Коши–Ри-

мана, а коэффициенты a_0, a_1 – некоторые комплексные постоянные.

Известно (см. [2], с. 140), что если характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2)$$

имеет один двукратный корень λ_0 , то всякую метааналитическую функцию $F^+(z)$ в области T^+ можно задать в виде

$$F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda_0 \bar{z}\}, \quad (3)$$

где $\varphi_k^+(z)$ ($k = 0, 1$) – аналитические в T^+ функции.

Рассмотрим теперь следующую краевую задачу, называемую обычно *основной краевой задачей типа Карлемана* для метааналитических функций.

Требуется найти все метааналитические в T^+ функции $F^+(z)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям.

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t) \overline{F^+(t)} + g_0(t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n} = G_1(t) \overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n}} + g_1(t), \quad (5)$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали к L ; $G_k(t), g_k(t)$ – заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$ на L , $\alpha(t)$ – функция сдвига, сохраняющая ориентацию контура и удовлетворяющая условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \quad (6)$$

причем $\alpha'(t) \neq 0$.

Сформулированную задачу будем для краткости обозначать $K_{2,M}$.

В случае произвольных односвязных областей с гладкими границами задача $K_{2,M}$ подробно исследована в работе [4], где доказано, что при выполнении условий

$$G_k[\alpha(t)] \overline{G_k(t)} \equiv 1, \quad G_k[\alpha(t)] \overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \equiv 0, \quad k = 0, 1, \quad (7)$$

решение задачи $K_{2,M}$ сводится к последовательному решению обобщенной и обычной задач типа Карлемана в классах аналитических функций.

В этой работе рассматривается важный частный случай, когда $L = \{t : |t| = 1\}$, а $\alpha(t)$ – прямой дробно-линейный сдвиг контура L . При этом, как установлено далее, задачу $K_{2,M}$ удастся свести к совокупности двух обычных задач типа Карлемана в классах аналитических функций.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $L = \{t : |t| = 1\}$, и $\alpha(t)$ выражается формулой (см. [3], § 2):

$$\alpha(t) = \frac{t - z_0}{\bar{z}_0 t - 1}, \quad |z_0| < 1. \quad (8)$$

Так как (см., напр., [1], с. 304)

$$\frac{\partial}{\partial n_{\pm}} = \pm i \left\{ t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right\} \quad (9)$$

и на $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняются соотношения $\bar{t} = \frac{1}{t}$, $t' = i \cdot t$, то с учетом (3)

краевые условия (4) и (5) можно переписать соответственно в следующем виде:

$$W^+[\alpha(t)] = \tilde{G}_0(t) \overline{W^+(t)} + \tilde{g}_0(t), \quad (10)$$

$$V^+[\alpha(t)] = \tilde{G}_1(t) \overline{V^+(t)} + \tilde{g}_1(t), \quad (11)$$

где

$$W^+(z) = z \varphi_0^+(z) + \varphi_1^+(z), \quad (12)$$

$$V^+(z) = z^3 \frac{\overline{\alpha \psi_0^+(z)}}{\alpha z} + z^2 \frac{\overline{\alpha \varphi_1^+(z)}}{dz} + \lambda_0 z \varphi_0^+(z) + (\lambda_0 + z) \varphi_0^+(z), \quad (13)$$

а функции $\tilde{G}_k(t)$, $\tilde{g}_k(t)$, $k = 0, 1$, имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k(t) &= G_k(t) t^{\alpha^{k+1}} \alpha^{\alpha^{k+1}}(t) \exp\left\{\frac{\lambda_0}{t}\right\} \exp\left\{-\frac{\lambda_0}{\alpha(t)}\right\}, \\ \tilde{g}_k(t) &= (-1)^k g_k(t) \alpha^{k+1}(t) \exp\left\{-\frac{\lambda_0}{\alpha(t)}\right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

причем попутно заметим, что здесь $\chi_k = \text{ind} \tilde{G}_k(t) = \chi_k + 2(k+1)$, где $\chi_k = \text{ind} G_k(t)$ ($k = 0, 1$).

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что при выполнении условий (7) верны также и тождества

$$\tilde{G}_k[\alpha(t)] \overline{\tilde{G}_k(t)} \equiv 1, \quad (15)$$

$$\tilde{G}_k[\alpha(t)] \overline{\tilde{g}_k(t)} + \tilde{g}_k[\alpha(t)] \equiv 0, \quad k = 0, 1. \quad (16)$$

Таким образом, равенство (10) представляет собой краевое условие внутренней задачи типа Карлемана относительно аналитической в T^+ функции $W^+(z)$.

Решая задачу (10), при $\tilde{\chi}_0 = \text{ind} \tilde{G}_0(t) = 2\tilde{m}_0 > 0$ будем иметь (см. [3], с. 205):

$$W^-(z) = X_0^+(z) \left[\Psi_0^+(z) + c_0 + \sum_{k=1}^{\tilde{m}_0} \left(\frac{c_k}{z^k} + \bar{c}_k \alpha^k(z) \right) \right], \quad z \in T^+, \quad (17)$$

где $X_0^+(z) = z^{\tilde{m}_0} \exp\{\Gamma_0^+(z)\}$ – каноническая функция задачи (10),

$$\begin{aligned} \Gamma_0^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln(\alpha^{\tilde{m}_0}(\tau) \tau^{-\tilde{m}_0} \tilde{G}_0[\alpha(\tau)])}{\tau - z} d\tau - \\ &- \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\ln(\alpha^{\tilde{m}_0}(\tau) \tau^{-\tilde{m}_0} \tilde{G}_0[\alpha(\tau)])}{\tau - z_0} d\tau, \quad z \in T^+, \\ \Psi_0^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_0[\alpha(t)]}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_0[\alpha(t)]}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z_0}, \quad z \in T^+, \end{aligned} \quad (18)$$

$c_k (k = 0, \dots, \tilde{m}_0)$ – произвольные комплексные постоянные, причем $\text{Im} c_0 = 0$.

Если же $\tilde{\chi}_0 < 0$, то решение задачи (10) также задается формулой (17), где нужно положить $c_k = 0$ ($k = 0, \dots, \tilde{m}_0$), при выполнении $(-\tilde{\chi}_0 - 1)$ действительных условий разрешимости

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_0[\alpha(t)]}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}_0[\alpha(t)]}{X_0^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z_0} \right\} &= 0, \\ \text{Re} \int_L \frac{\tilde{g}_0[\alpha(t)]}{X_0^+(\tau)} \tau^{-k-1} d\tau &= 0, \quad \text{Im} \int_L \frac{\tilde{g}_0[\alpha(t)]}{X_0^+(\tau)} \tau^{-k-1} d\tau = 0, \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, \tilde{m}_0 - 1. \quad (19)$$

Далее, аналогично решая обычную задачу типа Карлемана (11), находим (в случае ее разрешимости) аналитическую функцию $V^+(z)$.

По найденным функциям $W^+(z)$ и $V^+(z)$ можно определить аналитические компоненты искомой метааналитической функции.

Действительно, в силу равенств (12) и (13) должна выполняться следующая система равенств:

$$\begin{cases} z \varphi_0^+(z) + \varphi_1^+(z) = W^+(z), \\ z^3 \frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + z^2 \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} + \lambda_0 z \varphi_0^+(z) + (\lambda_0 + z) \varphi_1^+(z) = V^+(z). \end{cases} \quad (20)$$

Решая ее относительно $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$, получим:

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{2} \frac{dW^+(z)}{dz} + \frac{\lambda_0 + z}{2z^2} W^+(z) - \frac{V^+(z)}{2z^2}, \quad (21)$$

$$\varphi_1^+(z) = \frac{z - \lambda_0}{2z} W^+(z) + \frac{V^+(z)}{2z} - \frac{z}{2} \frac{dW^+(z)}{dz}. \quad (22)$$

Функции $W^+(z)$ и $V^+(z)$ являются аналитическими в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$. Следовательно, их можно разложить в степенные ряды в окрестности точки $z=0$, т. е.

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad V^+(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k, \quad z \in T^+, \quad (23)$$

где (см. [5], с. 130)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L W^+(\tau) \tau^{-k-1} d\tau, \quad b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L V^+(\tau) \tau^{-k-1} d\tau, \quad (24)$$

$W^+(\tau)$, $V^+(\tau)$ – граничные значения функций $W^+(z)$ и $V^+(z)$ соответственно.

Подставив полученные по формуле (24) выражения для функций $W^+(z)$ и $V^+(z)$ в (21), (22) и собирая коэффициенты при z^{-1} и z^{-2} , получим условия, которым дополнительно должны удовлетворять решения задач (10) и (11) (функции $W^+(z)$ и $V^+(z)$ соответственно):

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 - b_0 = 0, \\ \lambda_0 a_1 + a_0 - b_1 = 0. \end{cases} \quad (25)$$

При выполнении условий (25) решение исходной задачи $K_{2,M}$ в рассматриваемом случае задается формулой

$$F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z)] \exp\{\lambda_0 \bar{z}\}, \quad (26)$$

где $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ определяются по формулам (21), (22).

Исследуем теперь картину разрешимости задачи $K_{2,M}$ в случае единичного круга и дробно-линейного сдвига контура. Из изложенного следует, что картина разрешимости задачи $K_{2,M}$ складывается из картин разрешимости задач (10) и (11), которые в свою очередь зависят от индексов $\tilde{\chi}_\infty = \text{Ind} \tilde{G}_0(t)$ и $\tilde{\chi}_1 = \text{Ind} \tilde{G}_1(t)$. Возможны четыре различных случая:

1) $\tilde{\chi}_0 \geq 0$, $\tilde{\chi}_1 > 0$. В этом случае обе задачи (10) и (11) безусловно разрешимы, и их общие решения зависят от $\tilde{\chi}_0 + 1$ и $\tilde{\chi}_1 + 1$ произвольных действительных постоянных соответственно. Следовательно, условия (25) представляют собой систему из четырех алгебраических уравнений относительно $\tilde{\chi}_0 + \tilde{\chi}_1 + 2$ действительных неизвестных $\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{\tilde{\chi}_0}, \tilde{\delta}_0, \dots, \tilde{\delta}_{\tilde{\chi}_1}$, где

$\bar{c}_0 = c_0$, $\bar{c}_k = \operatorname{Re} c_k$, $k = 1, \dots, \bar{m}_0$, $\bar{c}_k = \operatorname{Im} c_{k-\bar{m}_0}$, $k = \bar{m}_0 + 1, \dots, \bar{\chi}_0$; $\bar{\delta}_0 = \delta_0$, $\bar{\delta}_j = \operatorname{Re} \delta_j$, $j = 1, \dots, \bar{m}_1$, $\bar{\delta}_j = \operatorname{Im} \delta_{j-\bar{m}_1}$, $j = \bar{m}_1 + 1, \dots, \bar{\chi}_1$. Здесь $\delta_j (j=0, \dots, \chi_1)$ – произвольные комплексные постоянные ($\operatorname{Im} \delta_0 = 0$), содержащиеся в общем решении задачи (11). Пусть эта система совместна, и r – ранг ее основной матрицы. Тогда из параметров $\bar{c}_k, \bar{\delta}_j$ ($k=0, \dots, \bar{\chi}_0, j=0, \dots, \bar{\chi}_1$) r выражаются через остальные $\bar{\chi}_0 + \bar{\chi}_1 + 2 - r$, и общее решение исходной задачи $K_{2,M}$ зависит от $\bar{\chi}_0 + \bar{\chi}_1 + 2 - r$ произвольных действительных постоянных, где $0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_0 + \bar{\chi}_1 + 2\}$.

2) $\bar{\chi}_0 \geq 0$, $\bar{\chi}_1 < 0$. В данном случае задача (10) безусловно разрешима, а ее общее решение содержит $\bar{\chi}_0 + 1$ произвольных действительных постоянных. При этом задача (11) имеет единственное решение при выполнении $(-\bar{\chi}_1 - 1)$ действительных условий разрешимости вида

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{g}_1[\alpha(t)]}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\bar{g}_1[\alpha(t)]}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z_0} \right\} = 0,$$

$$\operatorname{Re} \int_L \frac{\bar{g}_1[\alpha(t)]}{X_1^+(\tau)} \tau^{-k-1} d\tau = 0, \operatorname{Im} \int_L \frac{\bar{g}_1[\alpha(t)]}{X_1^+(\tau)} \tau^{-k-1} d\tau = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, -\bar{m}_1 - 1, \quad (27)$$

где $X_1^+(z)$ – каноническая функция задачи (11). Если условия (27) выполняются, то условия (25) являются системой из четырех алгебраических уравнений относительно неизвестных $\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{\bar{\chi}_0}$. При совместности этой системы общее решение исходной задачи $K_{2,M}$ зависит от $\bar{\chi}_0 + 1 - r$ произвольных действительных постоянных, где r – ранг определенной матрицы, причем здесь $0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_0 + 1\}$.

3) $\bar{\chi}_0 < 0$, $\bar{\chi}_1 \geq 0$. В этом случае задача (11) безусловно разрешима, а ее общее решение зависит от $\bar{\chi}_1 + 1$ произвольных действительных постоянных $\bar{\delta}_0, \dots, \bar{\delta}_{\bar{\chi}_1}$. В то же время задача (10) разрешима при выполнении $(-\bar{\chi}_0 - 1)$ условий разрешимости вида (19), в этом случае она будет иметь единственное решение. Следовательно, если выполняются условия (19), то условия (25) представляют собой систему из четырех алгебраических уравнений относительно действительных постоянных $\bar{\delta}_0, \dots, \bar{\delta}_{\bar{\chi}_1}$. При совместности этой системы общее решение задачи $K_{2,M}$ зависит от $\bar{\chi}_1 + 1 - r$ произвольных действительных постоянных, где r – ранг определенной матрицы, причем $0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_1 + 1\}$.

4) $\bar{\chi}_0 < 0$, $\bar{\chi}_1 < 0$. В этом случае задачи (10) и (11) имеют единственные решения при выполнении $(-\bar{\chi}_0 - 1)$ условий разрешимости вида (19) и $(-\bar{\chi}_1 - 1)$ условий разрешимости вида (27) соответственно. Тогда при одновременном выполнении указанных условий и условий (25) задача $K_{2,M}$ имеет единственное решение, задаваемое формулой (26).

Таким образом, относительно задачи $K_{2,M}$ в рассматриваемом случае получили следующие результаты.

Теорема. Пусть характеристическое уравнение (2) имеет один (двукратный) корень λ_0 , контур $L = \{t : |t| = 1\}$, а $\alpha(t)$ – прямой дробно-линейный сдвиг L . Тогда

1) если $\bar{\chi}_0 \geq 0$ и $\bar{\chi}_1 > 0$, то для разрешимости задачи $K_{2,M}$ необходимо и достаточно выполнения условий вида (25), и при выполнении этих условий общее решение задачи $K_{2,M}$ задается формулой (26), причем оно линейно зависит $\bar{\chi}_0 + \bar{\chi}_1 + 2 - r$ от произвольных действительных постоянных, где r – ранг определенной матрицы ($0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_0 + \bar{\chi}_1 + 2\}$);

2) если $\bar{\chi}_0 > 0$ и $\bar{\chi}_1 < 0$, то для разрешимости задачи $K_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий вида (27) и (25), и при выполнении этих условий общее решение задачи можно задать формулой (26), причем оно линейно зависит от $\bar{\chi}_0 + 1 - r$ произвольных действительных постоянных, где r – ранг определенной матрицы ($0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_0 + 1\}$);

3) если же $\bar{\chi}_0 < 0$ и $\bar{\chi}_1 \geq 0$, то для разрешимости задачи $K_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий вида (19) и (25), и при выполнении этих условий общее решение задачи можно задать формулой (26), причем оно линейно зависит от $\bar{\chi}_1 + 1 - r$ произвольных действительных постоянных, где r – ранг определенной матрицы ($0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_1 + 1\}$);

4) наконец, если $\bar{\chi}_0 < 0$ и $\bar{\chi}_1 < 0$, то для разрешимости задачи $K_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий (19), (27), (25), и при выполнении указанных условий она будет иметь единственное решение, задаваемое формулой (26).

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Расулов К. М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск, 1998.
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977.
4. Расулов К. М., Фатулаев Б. Ф. // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: Межвуз. сб. науч. тр. Смоленск, 1999. С. 70.
5. Бицадзе А. В. Основы теории функций комплексного переменного. М., 1984.

Поступила в редакцию 30.03.2000

Зверович Эдмунд Иванович – доктор физико-математических наук.

Фатулаев Буба Фатулаевич – кандидат физико-математических наук (Смоленский государственный педагогический университет).

УДК 517.977

Е.А. РУЖИЦКАЯ

СТАБИЛИЗАЦИЯ В БОЛЬШОМ МАЯТНИКА В ВЕРХНЕМ ПОЛОЖЕНИИ

The stabilization method of nonlinear model of the turned pendulum is described. The results are illustrated by numerical accounts.

1. Постановка задачи. Уравнение движения маятника с учетом действующего на него момента имеет вид:

$$\ddot{x} + \sin x = u. \quad (1)$$

Пусть управление $u(t)$, $t > 0$, ограничено: $|u(t)| < L$, $t > 0$ ($0 < L < \infty$).

Задача стабилизации: при выбранных $0 < L < \infty$, области $G \subset R^2$, $(x = \pi, \dot{x}_0 = 0) \in G$, найти дискретную обратную связь

$$u = u(x, \dot{x}), |u(x, \dot{x})| < L, (x, \dot{x}) \in G, (u(\pi, 0) = 0), \quad (2)$$

при которой решение $x(t) = \pi$, $\dot{x}(t) = 0$, $t > 0$, замкнутой системы

$$\ddot{x} + \sin x = u(x, \dot{x}) \quad (3)$$

асимптотически устойчиво в G . Функцию (2) назовем ограниченной стабилизирующей обратной связью.