для которых вычисляются определенные ранее числовые характеристики оператора $A-\lambda I$. Заметим, что в случае теоремы 2 существенные спектры являются p-зависимыми, что в значительной мере определяется областью существования решений уравнений $(A-\lambda I)x=0$, $(A'-\lambda I)y=0$, где $x\in \boldsymbol{l}_p$, $y\in \boldsymbol{l}_q$.

Частный случай, когда выполняется условие (1), задается матрицей A с элементами: $a_{nk}=0$, $k>n$, $a_{nk}=q^i/\sum_{i=0}^{n} q^i$ при $k<n$, где $q=1/(1-\delta)$. Частный случай, когда не выполняется условие (1) (на диагонали стоит бесконечное число пар одинаковых элементов), задается матрицей, у которой на диагонали стоят элементы: $c_0=1$, $c_{2n}=1/r$, $c_{2n-1}=1/s$, где $1<r<s$, рассмотрен в [2]. Условию (2) удовлетворяют операторы Чезаро, существенные спектры которых в пространствах $\boldsymbol{l}_p$, $1<p<\infty$, исследованы в работе [6].

1. Еровенко В.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1998. № 1. С. 18.
2. Rhoades B.E. // Integral Equation and Operator Theory. 1989. Vol. 12. № 1. P. 82.
3. Goldberg S. // Unbounded linear operators. Theory and applications. New York, 1966
4. Тейлор А.Е., Халберг Ч. Дж. А. // Математика. 1959. Т. 3. № 1. С. 69.
5. Като Т. // Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
6. Еровенко В.А. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 9. С. 784.

Еровенко Валерий Александрович – доктор физико-математических наук.
Северенчук Наталья Борисовна – аспирантка. Научный руководитель В.А. Еровенко.

УДК 513.83

Г.О. КУКРАК, В.Л. ТИМОХОВИЧ

О ПРЕДЕЛЕ ОБРАТНОГО СПЕКТРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

The article deals with the inverse limits of hyperspaces endowed with the Flachmeyer and the Vietoris topologies. The continuity of the functor of the Flachmeyer hyperspace considered on the category of T_1-spaces and perfect maps is proved. The inverse limits of the Vietoris hyperspaces in the certain more special category are considered. In this category the necessary and sufficient condition for the canonical map $H\colon \exp \underleftarrow{\lim} S \to \underleftarrow{\lim} \exp S$ to be a homeomorphism is obtained.

Предлагаемая работа посвящена вопросу о непрерывном продолжении функтора exp на категории более широкие, чем категория COMP компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений, и относится к тематике, берущей начало в известных работах Дж. Сигала [1], С. Сироты [2] и П. Зенора [3].

Остановимся на некоторых определениях и обозначениях. Все рассматриваемые здесь топологические пространства будем считать T_1-пространствами, а отображения – непрерывными. Для пространства X, множества $A\subset X$ и точки $x\in X$ обозначим: τ_X и φ_X – топология и соответственно семейство всех замкнутых множеств в X (вместо $A\in\tau_X$ ($A\in\varphi_X$) будем иногда писать $A\underset{op}{\subset} X$ (соответственно $A\underset{cl}{\subset} X$)), $\tau_X(x)$ ($\tau_X(A)$) – семейство всех окрестностей точки x (соответственно множества A) в X, $[A]_X$ – замыкание A в X, $T_1(A)=\{F\in\varphi_X \mid F\cap A\neq\varnothing\}$, $T_2(A)=\{F\in\varphi_X \mid \varnothing\neq F\subseteq A\}$. Множество A называют дискретным в X, если дискретно в X семейство $\{\{a\}\mid a\in A\}$. Пространство X назовем изокомпактным, если компактно любое счетно-компактное множество $F\in\varphi_X$.

Предбазы $\{T_1(U), T_2(U)/ U\in\tau_X\}$ и $\{T_1(U), T_2(V)/ U, V\in\tau_X, X\setminus V$ компактно$\}$ задают на множестве $\varphi_X\setminus\{\varnothing\}$ топологии Виеториса (см., напр., [4, 5]) и соответственно Флаксмайера [6, 7]. Фиксируя на $\varphi_X\setminus\{\varnothing\}$ эти топологии, получаем соответственно пространства $\exp X$ и $\exp_F X$ (экспонента и экспонента Флаксмайера пространства X). Отметим, что при $A\in\varphi_X$ пространство $\exp A$ ($\exp_F A$) замкнутое подпространство в $\exp X$ (соответственно в $\exp_F X$).

Отображение $f: X \to Y$ называют замкнутым, если $f(F) \underset{cl}{\subset} f(X)$ для любого $F \in \varphi_X$, компактным, если $f^{-1}(y)$ компактно для любой точки $y \in Y$, совершенным, если оно замкнуто и компактно, отделимым (хаусдорфовым), если для любой $y \in Y$ любые различные точки x_1, $x_2 \in f^{-1}(y)$ имеют в X (соответственно в $f^{-1}(y)$) дизъюнктные окрестности.

Для замкнутого (совершенного) отображения $f: X \to Y$, при котором $f(X) \underset{cl}{\subset} Y$, определено индуцированное отображение $\bar{f}: \exp X \to \exp Y$ (соответственно $\bar{f}: \exp_F X \to \exp_F Y$) формулой $\bar{f}(F) = f(F)$.

Если $B \subset Y$ и $f(A) \subset B$, то для сужения $f|_A: A \to B$ будем использовать тот же символ f.

Пусть T – частично упорядоченное множество, $K \subset T$. Говорят, что K конфинально в T, если для любого $t \in T$ найдется $s \in K$: $s > t$. Множество T называют направленным, если для любых t, $s \in T$ можно подобрать $h \in T$: $h > t$, $h > s$. Совокупность S, состоящую из направленного множества T, семейства пространств $\{X_t \mid t \in T\}$ и связующих отображений $\{\pi_t^s : X_s \to X_t \mid t, s \in T, s > t\}$, называют обратным спектром, или просто спектром, и кратко обозначают $S = \{X_t, \pi_t^s, T\}$ (см., напр., [4, 5]), если $\pi_t^t = id$ и $\pi_t^h = \pi_t^s \circ \pi_s^h$ для любых t, s, $h \in T$, $t < s < h$. Подпространство $\varprojlim S \subset \prod_{t \in T} X_t$, $\varprojlim S = \{(x_t)_{t \in T} \mid \pi_t^s(x_s) = x_t$ при $s > t\}$, называют пределом, его элементы – нитями спектра S, а отображения $\pi_s: \varprojlim S \to X_s : (x_t)_{t \in T} \to x_s$ – сквозными проекциями. Если $K \subset T$ и K конфинально в T, то семейство $\{\pi_s^{-1}(U) \mid U \in \tau_{X_s},\ s \in K\}$ – база в $\varprojlim S$, $S|_K = \{X_s, \pi_s^h, K\}$ – тоже обратный спектр (конфинальный подспектр спектра S) и проекция $P_K: \varprojlim S \to \varprojlim(S|_K) : \xi \to (\pi_s(\xi))_{s \in K}$ – канонический гомеоморфизм [4, 5]. Отметим, что вместе со спектром $S = \{X_t, \pi_t^s, T\}$ определен и спектр $S^0 = \{\pi_t(\varprojlim S), \pi_t^s, T\}$, у которого все связующие отображения и все сквозные проекции сюръективны, и $\varprojlim S^0 = \varprojlim S$.

1. Для спектра $S = \{X_t, \pi_t^s, T\}$ обозначим $L = \varprojlim S$, $L_t = \pi_t(L)$.

Лемма 1. $(\pi_t^s)^{-1}(B) \cap L_s = \pi_s(\pi_t^{-1}(B))$ для любых t, $s \in T$, $s > t$, и $B \subseteq X_t$.

Лемма 2. Пусть $F \in \varphi_L$. Тогда определен спектр $S' = \{\pi_t(F), \pi_t^s, T\}$ и $\varprojlim S' = F$.

Лемма 3. Пусть $F \subseteq U \in \tau_L$ и множество F компактно. Тогда найдутся $s \in T$ и $V \underset{op}{\subset} X_s$ такие, что $F \subset \pi_s^{-1}(V) \subset U$.

Лемма 4. Если все связующие отображения π_t^s хаусдорфовы (отделимы), то и все сквозные проекции π_t и все сужения $L_s \xrightarrow{\pi_t^s} L_t$ тоже хаусдорфовы (соответственно отделимы).

Лемма 5. Если все отображения π_t^s хаусдорфовы и компактны, то: (а) $L_t = \bigcap_{h > t} \pi_t^h(X_h)$; (б) $\pi_s(\pi_t^{-1}(x)) = \bigcap_{h > s} \pi_s^h((\pi_t^h)^{-1}(x))$ для любых t, $s \in T$, $s > t$, и $x \in X_t$.

Лемма 6. Если все отображения π_t^s хаусдорфовы и компактны, то все сквозные проекции π_t и все сужения $L_s \xrightarrow{\pi_t^s} L_t$ тоже компактны. Если, кроме того, все π_t^s сюръективны, то и все π_t сюръективны.

Содержание лемм 2 и 3 хорошо известно [4, 5], лемма 1 проверяется без труда. Леммы 4, 5 и 6 вытекают из канонической гомеоморфности множества $\pi_t^{-1}(x)$ и предела спектра $S'=\{(\pi_s^h)^{-1}(x),\ \pi_s^h,\ K\}$, где $K=\{s\in T \mid s>t\}$ (канонический гомеоморфизм – проекция $\pi_t^{-1}(x)\xrightarrow{P_K}\varprojlim S'$), и из известной теоремы Куратовского о непустоте и компактности предела спектра из непустых хаусдорфовых компактных пространств (см. [4]). Для доказательства леммы 6 необходима также лемма 1. С помощью леммы 6 доказывается

Лемма 7. Пусть все π^s хаусдорфовы и компактны, $F_t \underset{cl}{\subset} X_t$ и $\pi_t^s(F_s)=F_t$ для любых $t,\ s\in T,\ s>t$. Тогда определен спектр $S'=\{F_t,\ \pi^s,T\}$, и для $B=\varprojlim S'$ справедливы соотношения: (а) $B\in\varphi_L$; (б) $\pi_t(B)=F_t$ для любого $t\in T$.

Из лемм 5(б) и 1 следует

Лемма 8. Пусть все отображения π_t^s хаусдорфовы и совершенны. Тогда все сквозные проекции π_t и все сужения $L_s\xrightarrow{\pi_t^s}L_t$ тоже совершенны.

2. Далее в этой части считаем, что все связующие отображения π_t^s хаусдорфовы, совершенны и $\pi_t^s(X_s)\underset{cl}{\subset}X_t$ для любых $t,\ s\in T,\ s>t$. В силу леммы 5(а) $L_t\underset{cl}{\subset}X_t$ для каждого $t\in T$. Таким образом, определены спектры $\exp S=\{\exp X_t,\ \overline{\pi}_t^s,\ T\}$ и $\exp_F S=\{\exp_F X_t,\ \overline{\pi}_t^s,\ T\}$, а также $\exp S^0=\{\exp L_t,\ \overline{\pi}_t^s,\ T\}$ и $\exp_F S^0=\{\exp_F L_t,\ \overline{\pi}_t^s,\ T\}$. С помощью леммы 7(б) нетрудно доказать

Утверждение 1. $\varprojlim \exp S=\varprojlim \exp S^0$, $\varprojlim \exp_F S=\varprojlim \exp_F S^0$.

Обозначим $\Lambda=\varprojlim \exp S$, $\Lambda_F=\varprojlim \exp_F S$, $\Pi_t:\Lambda\to\exp X_t$ – сквозная проекция. Отметим, что как множества Λ и Λ_F совпадают, но $\tau_\Lambda>\tau_{\Lambda_F}$ ($\tau_\Lambda=\tau_{\Lambda_F}$, если хотя бы одно из пространств X_t компактно). В силу лемм 5(а) и 8 определены индуцированные сквозными проекциями отображения $\overline{\pi}_t:\exp L\to\exp X_t$, $\overline{\pi}_t:\exp_F L\to\exp_F X_t$. Они задают канонические морфизмы $H:\exp L\to\Lambda$, $H:\exp_F L\to\Lambda_F$ формулой $H(F)=(\pi_t(F))_{t\in T}$. Применяя леммы 2 и 7 легко доказать

Утверждение 2. Отображение H биективно.

Теорема 1. Отображение $H:\exp_F L\to\Lambda_F$ – гомеоморфизм.

Доказательство сводится к применению утверждения 1 и леммы 3 для проверки непрерывности H^{-1}.

Следствие 1. Функтор $\exp_F$ непрерывен на категории T_1-пространств и отделимых совершенных отображений, $f: X\to Y$, для которых $f(X)\in\varphi_Y$.

3. *Определение* 1. [8] Скажем, что отображение $f: X\to Y$ удовлетворяет условию (*), если для любых $F\in\varphi_X$ и $U\in\tau_X(F)$ множество $f^{-1}(f(F))\setminus U$ компактно.

В [8] доказано, что для совершенного сюръективного отображения $f: X\to Y$ индуцированное отображение $\overline{f}:\exp X\to\exp Y$ совершенно тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию (*).

Определение 2. Хаусдорфово пространство X назовем δ-хаусдорфовым, если из любого бесконечного дискретного в X множества $A\subset X$ можно выбрать бесконечное $B\subset A$, допускающее дискретное в X семейство $\{U_b \mid b\in B\}$, где $U_b\in\tau(b)$, $b\in B$.

Отметим, что δ-хаусдорфовы пространства, так же как и изокомпактные, наследственны по замкнутым множествам. Заметим также, что в δ-хаусдорфовом пространстве замыкание любого счетно-компактного пространства тоже счетно-компактно. Опираясь на сказанное, нетрудно показать, что класс изокомпактных δ-хаусдорфовых пространств замкнут относительно взятия произведения любой совокупности пространств, а также относительно перехода к пределу любого спектра.

Определение 3. Пусть $K \subset T$ и K конфинально в T, $F_s \subset X_s$ и $\pi_s^h(F_h) \subset F_s$ для любых $s, h \in K$, $h > s$. Скажем, что спектр S правильно ужимается до спектра $S' = \{F_s, \pi_s^h, K\}$, если $F_s \underset{cl}{\subset} X_s$ и $\pi_s^h(F_h) = F_s$ для любых s, $h \in K$, $h > s$, и $\varprojlim S' = \varprojlim (S|_K)$, где $S|_K = \{X_s, \pi_s^h, K\}$.

Определение 4. Спектр S назовем компактно ветвящимся, если для каждого X_t можно подобрать компактное $\Phi_t \subset X_t$ таким образом, что $(\pi_t^s)^{-1}(\Phi_t) = \Phi_s$ и $|(\pi_t^s)^{-1}(x)| \le 1$ для любых $t, s \in T$, $s > t$, и $x \in X_t \setminus \Phi_t$.

Далее на спектр S наложим следующие условия (более сильные, чем в части 2). Будем считать, что все пространства X_t δ-хаусдорфовы, регулярны и изокомпактны, а все отображения π_t^s совершенны, удовлетворяют условию (*) и $\pi_t^s(X_s) \underset{cl}{\subset} X_t$ для любых $t, s \in T$, $s > t$.

Для произвольных $t, s \in T$, $s > t$, обозначим $M_t^s = \{x \in L_t \,|\, |(\pi_t^s)^{-1}(x) \cap L_s| > 2\}$, $M_t = \bigcup\limits_{h>t} M_t^h$. Ясно, что $\pi_t^s(M_s) \subset M_t$ при $s > t$.

Теорема 2. Канонический морфизм $H: \exp L \to \Lambda$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда множества $[M_t]_{X_t}$ компактны для всех $t \in T$.

Доказательство. Поскольку $\Lambda = \varprojlim \exp S^0$ (утверждение 1), от спектров S и $\exp S$ можно перейти к спектрам S^0 и $\exp S^0$. Так как $L_t \underset{cl}{\subset} X_t$ при любом $t \in T$, S^0 удовлетворяет всем условиям, наложенным на S. Но тогда все отображения $\bar{\pi}_t^s: \exp L_s \to \exp L_t$ совершенны [8], откуда совершенны и все отображения $\Pi_t: \Lambda \to \exp L_t$ (лемма 8). Пусть H – гомеоморфизм. В силу равенства $\bar{\pi}_t = \Pi_t \circ H$ имеет место совершенность всех $\bar{\pi}^s$. Но, таким образом, все π_t удовлетворяют условию (*) [8]. Допустим, что для некоторого $t \in T$ множество $[M_t]_{X_t}$ некомпактно. В этом случае существуют дискретные в L_t множество $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_t$ ($a_n \ne a_m$ при $n \ne m$) и семейство $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n \in U_n \underset{op}{\subset} L_t$ для любого $n \in N$. Для каждой точки a_n подберем $t(n) \in T$, точки x_n, $y_n \in L_{t(n)}$ и $V_n \underset{op}{\subset} L_{t(n)}$ такие, что $t(n) > t$, $\pi_t^{t(n)}(x_n) = \pi_t^{t(n)}(y_n) = a_n$, $y_n \notin V_n \ni x_n$ и $\pi_t^{t(n)}(V_n) \subset U_n$. Все пары (a_n, x_n) и (a_n, y_n) продолжим до нитей $\xi_n \in L$ и $\eta_n \in L$ соответственно и обозначим $F = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \pi_{t(n)}^{-1}(V_n)$. Ясно, что $F \in \varphi_L$, $G \in \tau_L(F)$, $\pi_t^{-1}(\pi_t(F)) \setminus G \supset B$ и B дискретно в L, что противоречит условию (*).

Пусть все $[M_t]_{X_t}$ компактны. Вследствие утверждения 2 достаточно рассмотреть произвольные $F \in \exp L$ и $T_i(U_i) \ni F$, где $U_i \in \tau_L$, $i = 1, 2$, и найти $G_i \in \tau_\Lambda$ такие, что $G_i \ni H(F)$ и $T_i(U_i) \supset H^{-1}(G_i)$. В случае $i = 1$ фиксируем нить $\xi \in U_1 \cap F$, $t \in T$ и $V \underset{op}{\subset} L_t$ такие, что $\xi \in \pi_t^{-1}(V) \subset U_1$, затем полагаем $G_1 = \Pi_t^{-1}(T_1(V))$. При $i = 2$

зафиксируем произвольный $t\in T$ и обозначим $B=\pi_t^{-1}(\pi_t(F))\backslash U_2$. Если $B=\varnothing$, то $U_2\supset\pi_t^{-1}(\pi_t(F))$, и вследствие замкнутости π_t найдется $V\underset{op}{\subset}L_t$ такое, что $\pi_t(F)\subset V$ и $\pi_t^{-1}(V)\subset U_2$. Тогда полагаем $G_2=\Pi_t^{-1}(T_2(V))$. Если $B\neq\varnothing$, то $\pi_t^s(\pi_s(B))\subset M_t$ при $s>t$, откуда следует компактность B. В силу леммы 3 существует $s\in T$: $\pi_s(F)\cap\pi_s(B)=\varnothing$. Но тогда $\pi_s^{-1}\pi_s(F)\subset U_2$, и далее действуем как в случае $B=\varnothing$. Доказательство завершено.

Следствием теоремы 2 является

Теорема 3. Канонический морфизм $H.\exp L\to\Lambda$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда спектр S правильно ужимается до некоторого компактно ветвящегося спектра S'.

Для доказательства необходимости зафиксируем некоторый $t\in T$ и положим $K=\{s\in T\mid s>t\}$, $S'=S^0|_K$ и $\Phi_s=(\pi_t^s)^{-1}(|M_t|_{X_t})\cap L_s$ для любого $s>t$. Для доказательства достаточности с помощью леммы 6 и утверждения 1 установим равенство $S'=S^0|_K$ и каноническую гомеоморфность $\Lambda\sim\varprojlim\exp(S^0|_K)$, затем применим теорему 2.

В заключение приведем пример. В дискретном пространстве $N\times\{1, 2\}$ (N – натуральный ряд) фиксируем подпространства $X_n=\{(m, 1),(k, 2)\mid m\in N, 1<k<n\}$ и для $s>t$ ($t, s\in N$) положим $\pi_t^s((m, 1))=(m, 1)$, $\pi_t^s((k, 2))=(k, 2)$ при $t>k$ и $\pi_t^s((k, 2))=(k, 1)$ при $t<k$. Обратная последовательность $S=\{X_n, \pi_t^s, N\}$ удовлетворяет всем условиям, наложенным на S в этой части, однако отображение H не является здесь гомеоморфизмом.

1. Segal J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 10. P. 706.
2. Сирота С. // ДАН СССР. 1968. Т. 181. С. 1069.
3. Zenor P. // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 26. P. 190.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.
5. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. М., 1988.
6. Flachmeyer J. // Math. Nachr. 1964. Bd. 26. S. 321.
7. Flachmeyer J. // Math. Nachr. 1979. Bd. 89. S. 51.
8. Кукрак Г.О. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 3. С. 56.

Поступила в редакцию. 24.12.99.

Кукрак Глеб Олегович – ассистент.
Тимохович Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук.

УДК 517.968

Э.И. ЗВЕРОВИЧ, Б.Ф. ФАТУЛАЕВ

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ КРУГА И ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО СДВИГА КОНТУРА

On solution of the boundary value problem of the Carleman type for meta-analytic functions for disk and the linear-fractional homeomorphism of the contour.

Пусть $T^+=\{z:|z|<1\}$, а $L=\{t:|t|=1\}$. В качестве положительного обхода контура L выберем тот, при котором область T^+ остается слева.

Напомним (см., напр., [2], с. 139), что функция $F(z)=U(x, y)+iV(x, y)$ называется *метааналитической* в области T^+, если она в этой области является регулярным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2F(z)}{\partial\bar{z}^2}+a_1\frac{\partial F(z)}{\partial\bar{z}}+a_0F(z)=0, \qquad (1)$$