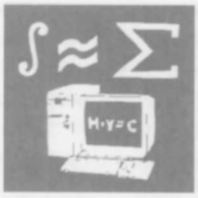
Математика и информатика



УДК 517.984

В. А. ЕРОВЕНКО, Н. Б. СЕВЕРЕНЧУК

СУЩЕСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СРЕДНЕГО В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ l_p

In this paper the essential spectra for different weighted mean operators were investigated in sequence spaces l_p, $1<p<\infty$.

Пусть $A\in \boldsymbol{B}(l_p)$, $1<p<\infty$ – нижняя треугольная матрица с элементами $a_{nk}=p_k/P_n$, $k<n$, где $p_k>0$, $p_0>0$, $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k$, удовлетворяющими условиям:

$$\lim_{n\to\infty} p_n/P_n=\delta,\ 0<\delta<1, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} np_n/P_n=\alpha>1/p,\ \ 1<p<\infty,\ \ \lim_{n\to\infty} n(np_n/P_n-(n+1)p_{n+1}/P_{n+1})=0. \tag{2}$$

Пусть $R(A)$ – область значений оператора A, $X\to X$, где X – банахово пространство; $N(A)$ – его ядро; $\rho(A)$ – резольвентное множество оператора; $\sigma(A)$ – спектр оператора A. Обозначим числовые характеристики линейного оператора A следующим образом: $\mathrm{nul}(A) := \dim N(A)$; $\mathrm{def}(A) := \mathrm{codim}\, R(A) = \dim X\backslash R(A)$, $\mathrm{ind}(A) := \mathrm{nul}(A) - \mathrm{def}(A)$.

Рассмотрим подмножества комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, определяемые полуфредгольмовыми и фредгольмовыми характеристиками оператора $A-\lambda I$:

$$\Delta_1(A) := \{\lambda\in \boldsymbol{C}:\ R(A-\lambda I)=\overline{R(A-\lambda I)}\};$$

$$\Phi^+(A) := \{\lambda\in\Delta_1(A): \mathrm{nul}(A-\lambda I)<\infty\};\quad \Phi^-(A) := \{\lambda\in\Delta_1(A): \mathrm{def}(A-\lambda I)<\infty\};$$

$$\Delta_2(A) := \Phi^+(A)\cup\Phi^-(A);\quad \Delta_3(A) := \Phi^+(A)\cap\Phi^-(A);\quad \Delta_4(A) := \{\lambda\in\Delta_3(A): \mathrm{ind}(A-\lambda I)=0\};$$

$$\Delta_5(A) := \{\lambda\in\Delta_4(A): \text{проколотая окрестность точки } \lambda \text{ лежит в } \rho(A)\}.$$

Существенными спектрами линейного оператора A называются подмножества спектра $\sigma(A)$, определяемые следующим образом:

$$\sigma_{ek}(A) := \boldsymbol{C}\setminus\Delta_k(A),\ k=\overline{1,5};\quad \sigma_{e2}^{\pm}(A) := \boldsymbol{C}\setminus\Phi^{\pm}(A).$$

Каждое из множеств $\sigma_{ek}(A)$ ($k=\overline{1,5}$), $\sigma_{e2}^{\pm}(A)$ называется существенным спектром; для них в математической литературе приняты следующие именные названия: $\sigma_{e1}(A)$ – существенный спектр Голдберга, $\sigma_{e2}(A)$ – существенный спектр Като, $\sigma_{e2}^{+}(A)$ – существенный спектр Вольфа, $\sigma_{e2}^{-}(A)$ – существенный спектр Густафсона–Вейдмана, $\sigma_{e3}(A)$ – существенный спектр Фредгольма, $\sigma_{e4}(A)$ – существенный спектр Вейля или Шехтера, $\sigma_{e5}(A)$ – существенный спектр Браудера [1]. Их можно описать и другими эквивалентными способами, которые отчасти являются мотивировками для их изучения. Очевидно, что рассмотренные существенные спектры удовлетворяют следующим включениям:

$$\sigma_{e1}(A)\subset\sigma_{e2}(A)\subset\sigma_{e2}^{\pm}(A)\subset\sigma_{e3}(A)\subset\sigma_{e4}(A)\subset\sigma_{e5}(A)\subset\sigma(A).$$

Пусть оператор $A \in \boldsymbol{B}(l_p)$, $1<p<\infty$, удовлетворяет условию (1). Тогда из работы [2] следует, что спектр такого оператора взвешенного среднего описывается следующим образом:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C}\colon |\lambda - 1/(2-\delta)| < (1-\delta)/(2-\delta)\} \cup cl(\{\lambda \in \boldsymbol{C}\colon \lambda = c_n = p_n/P_n,\ n=0, 1, 2, \ldots\}), \quad (3)$$

где $cl(M)$ – замыкание множества M.

Разобьем спектр оператора взвешенного среднего $\sigma(A)$, задаваемый множеством в правой части формулы (3) на специальные подмножества вида:

$$M_1 := \{\lambda \in \boldsymbol{C}\colon |\lambda - 1/(2-\delta)| < (1-\delta)/(2-\delta)\};$$
$$M_2 := \{\lambda \in \boldsymbol{C}\colon |\lambda - 1/(2-\delta)| = (1-\delta)/(2-\delta)\};$$
$$M_3 := \{\lambda = c_n = p_n/P_n,\ n=0, 1, 2, \ldots,\ 0<\lambda<\delta/(2-\delta)\}.$$

Лемма 1. Пусть $A \in \boldsymbol{B}(l_p)$, $1 \le p \le \infty$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечное число одинаковых элементов. Тогда для оператора A в пространстве l_p, $1<p<\infty$, и сопряженного оператора A в пространстве l_q, $1<q<\infty$, верно:

а) если $\lambda \in M_1$, то $\mathrm{nul}(A-\lambda I)=0$ и $\mathrm{nul}(A - \lambda I)=1$,

б) если $\lambda \in M_2 \setminus \{1, \delta/(2-\delta)\}$, то $\mathrm{nul}(A-\lambda I)=0$ и $\mathrm{nul}(A - \lambda I)=0$,

в) если $\lambda \in M_3$ и $\lambda \ne 0$, то $\mathrm{nul}(A-\lambda I)=1$, $\mathrm{nul}(A - \lambda I)=1$, если $\lambda=0$ и на диагонали стоит конечное число $c_{n_s} = 0$, $1<s<m$, то $\mathrm{nul}(A-\lambda I)=m$, $\mathrm{nul}(A - \lambda I)=m$.

В доказательстве леммы рассматриваются три возможности для точек спектра оператора взвешенного среднего $\lambda \in \sigma(A)$. 1) $\lambda \ne c_n$ для любого индекса n; 2) $\lambda = c_{n_s} \ne 0$, $1<s<m$, где все индексы n_s различны; 3) $\lambda = c_{n_s} = 0$, $1<s<m$, где все индексы n_s различны. В зависимости от этого, а также от принадлежности λ одному из множеств M_1, M_2 или M_3 получаем различное число линейно независимых решений уравнений $(\lambda I - A)x=0$, $(\lambda I - A)y=0$, где A' – банахово сопряженный к оператору A. Для этого используются свойства элементов матрицы A и соответствующие признаки сходимости числовых рядов. Следует отметить, что предположение о том, что диагональ матрицы A не содержит бесконечное число одинаковых элементов существенно при нахождении решения уравнения $(\lambda I - A)x=0$ в случае $\lambda \in M_3$, $\lambda \ne 0$.

Лемма 2. Пусть $A \in \boldsymbol{B}(l_p)$, $1<p<\infty$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечное число одинаковых элементов, тогда область значений оператора $A-\lambda I$ для $\lambda \in M_3$ замкнута.

При доказательстве леммы использовался тот факт, что если X – банахово пространство и $T\colon X \to X$ – ограниченный линейный оператор, то замыкание области значений оператора T совпадает с множеством векторов x, удовлетворяющих условию $f(x)=0$ для любого функционала $f \in X$ такого, что $T f = 0$, т. е. $\overline{R(T)} = {}^{\perp}N(T)$, где ${}^{\perp}N(T) = \{x \in X\colon f(x)=0 \text{ для всех } f \in N(T)\}$ ([3], теорема II. 3. 7).

Лемма 3. Пусть $A \in \boldsymbol{B}(l_p)$, $1<p<\infty$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечное число одинаковых элементов, тогда для $\lambda \in M_1$ оператор $A - \lambda I$ сюръективен.

Доказательство проводится прямыми вычислениями, при частичном использовании выкладок, проделанных в работе [2], с помощью которых устанавливается разрешимость сопряженного уравнения $(A - \lambda I)y = x$ $\forall x \in l_q$.

В доказательстве следующей теоремы используется таблица состояний Тейлора–Халберга [4]. В ней систематизирована взаимосвязанная информация о спектральных свойствах оператора T и его банахово сопряженного T. Если $T \in \boldsymbol{B}(X)$, т. е. T – ограниченный оператор, действующий из X в X, то для $R(T)$ имеются три возможности:

$$\text{I. } R(T)=X; \quad \text{II. } R(T) \ne X, \text{ но } \overline{R(T)}=X, \quad \text{III. } \overline{R(T)} \ne X$$

и имеются три возможности для $T^{-1}\colon R(X) \to X$:

1) существует T^{-1} и он непрерывен; 2) существует T^{-1} и он не непрерывен; 3) не существует T^{-1}.

При комбинации указанных вариантов получаем девять различных условий (например, если $T \in \mathrm{I}$ и $T \in \mathbf{3}$, то пишут $T \in \mathrm{I}_3$). Если рассматривать упорядоченную пару $(T, T\ )$, то упорядоченная пара условий называется состоянием пары $(T, T\ )$. Всего таких состояний восемьдесят одно, но для банахова пространства X возможны ровно девять пар состояний: $(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$, $(\mathrm{I}_3, \mathrm{III}_1)$, $(\mathrm{II}_2, \mathrm{II}_2)$, $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$, $(\mathrm{II}_3, \mathrm{III}_2)$, $(\mathrm{III}_1, \mathrm{I}_3)$, $(\mathrm{III}_2, \mathrm{II}_3)$, $(\mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3)$, $(\mathrm{III}_3, \mathrm{III}_3)$, причем состояния $(\mathrm{II}_2, \mathrm{III}_2)$ и $(\mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3)$ невозможны, если пространство X рефлексивно.

Теорема 1. Пусть оператор $A \in \boldsymbol{B}(l_p)$, $1<p<\infty$, матрица A удовлетворяет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечное число одинаковых элементов, тогда для существенных спектров оператора взвешенного среднего A справедливы формулы:

$$\sigma_{e1}(A) = \sigma_{e2}(A) = \sigma_{e2}^{\pm}(A) = \sigma_{e3}(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \ |\lambda - 1/(2-\delta)| = (1-\delta)/(2-\delta)\},$$

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e5}(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \ |\lambda - 1/(2-\delta)| < (1-\delta)/(2-\delta)\}.$$

Доказательство. Воспользуемся определением существенных спектров через множества $\Delta_k(A)$, $k=\overline{1,5}$, и $\Phi^{+}(A)$, $\Phi^{-}(A)$. Рассмотрим вначале множество M_1. Из леммы 1 следует, что $A - \lambda I$ не инъективен, из леммы 3 вытекает, что оператор $A - \lambda I$ сюръективен и, таким образом, $(A - \lambda I) \in \mathrm{I}_3$. Поэтому из таблицы состояний Тейлора–Халберга (см. [4], с. 77) следует, что справедливо включение $(A-\lambda I) \in \mathrm{III}_1$, т. е. существует непрерывный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$, что влечет замкнутость области значений: $R(A-\lambda I) = \overline{R(A-\lambda I)}$, поэтому $M_1 \subset \Delta_1(A)$. Из леммы 1 непосредственно следует, что $M_1 \subset \Delta_3(A) = \Phi(A)$, однако $M_1 \not\subset \Delta_4(A)$, таким образом, $M_1 \subset \sigma_{e4}(A) \subset \sigma_{e5}(A)$.

Рассмотрим множество $M_2 \backslash \{1, \delta/(2-\delta)\}$. Из леммы 1 вытекает, что $A - \lambda I$ и $A - \lambda I$ инъективны, а поскольку в соответствии с таблицей состояний Тейлора–Халберга $(A-\lambda I) \in \mathrm{II}_2$, и, следовательно, $\overline{R(A-\lambda I)} = \boldsymbol{l_p}$, но $R(A-\lambda I) \neq \boldsymbol{l_p}$, таким образом, $M_2 \backslash \{1, \delta/(2-\delta)\} \not\subset \Delta_1(A)$. Из теоремы об устойчивости индекса линейного ограниченного оператора ([5], теорема IV. 5. 22) при $\lambda=1$, $\delta/(2-\delta)$ получаем, что область значений не замкнута: $R(A-\lambda I) \neq \overline{R(A-\lambda I)}$, следовательно, $M_2 \not\subset \Delta_1(A)$.

Рассмотрим множество M_3. Из леммы 2 вытекает вложение: $M_3 \subset \Delta_1(A)$, а из леммы 1 следует, что $M_3 \subset \Delta_4(A)$, а так как точки множества M_3 – изолированные точки спектра, то $M_3 \subset \Delta_5(A) \subset \Delta_4(A) \subset \Delta_3(A) \subset \Delta_2(A)$, поэтому $M_3 \not\subset \sigma_{ek}(A)$, $k = \overline{1,5}$ и $M_3 \not\subset \sigma_{e2}^{\pm}(A)$.

Теорема 2. Пусть оператор $A \in \boldsymbol{B}(l_p)$, $1<p<\infty$, матрица A удовлетворяет условию (2) и диагональ матрицы A не содержит бесконечное число одинаковых элементов, тогда для существенных спектров оператора взвешенного среднего A справедливы равенства:

$$\sigma_{e1}(A) = \sigma_{e2}(A) = \sigma^{-}_{e2}(A) = \sigma_{e3}(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \ |\lambda - \alpha p/2(\alpha p-1)| = \alpha p/2(\alpha p-1)\},$$

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e5}(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \ |\lambda - \alpha p/2(\alpha p-1)| < \alpha p/2(\alpha p-1)\}.$$

Структура доказательства данной теоремы подобна доказательству теоремы 1. Для спектра оператора взвешенного среднего, удовлетворяющего условию (2), справедлива формула [2]:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \ |\lambda - \alpha p/2(\alpha p-1)| < \alpha p/2(\alpha p-1)\} \cup cl(\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = c_n = p_n/P_n, \ n=0, 1, 2, \ldots\}).$$

Для доказательства теоремы рассматриваются следующие подмножества спектра:

$$M_1 = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \ |\lambda - \alpha p/2(\alpha p-1)| < \alpha p/2(\alpha p-1), \ \lambda \neq c_n\},$$

$$M_2 = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \ |\lambda - \alpha p/2(\alpha p-1)| = \alpha p/2(\alpha p-1), \ \lambda \neq c_n\}, \ M_3 = \{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = c_n = p_n/P_n, \ n=0, 1, 2, \ldots\},$$

для которых вычисляются определенные ранее числовые характеристики оператора $A-\lambda I$. Заметим, что в случае теоремы 2 существенные спектры являются p-зависимыми, что в значительной мере определяется областью существования решений уравнений $(A-\lambda I)x=0$, $(A'-\lambda I)y=0$, где $x\in \boldsymbol{l_p}$, $y\in \boldsymbol{l_q}$.

Частный случай, когда выполняется условие (1), задается матрицей A с элементами: $a_{nk}=0$, $k>n$, $a_{nk}=q^i/\sum_{i=0}^{n} q^i$ при $k<n$, где $q=1/(1-\delta)$. Частный случай, когда не выполняется условие (1) (на диагонали стоит бесконечное число пар одинаковых элементов), задается матрицей, у которой на диагонали стоят элементы: $c_0=1$, $c_{2n}=1/r$, $c_{2n-1}=1/s$, где $1<r<s$, рассмотрен в [2]. Условию (2) удовлетворяют операторы Чезаро, существенные спектры которых в пространствах $\boldsymbol{l_p}$, $1<p<\infty$, исследованы в работе [6].

1. Е р о в е н к о В . А . // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1998. № 1. С. 18.
2. R h o a d e s B . E . // Integral Equation and Operator Theory. 1989. Vol. 12. № 1. P. 82.
3. G o l d b e r g S . // Unbounded linear operators. Theory and applications. New York, 1966
4. Т е й л о р А . Е . , Х а л б е р г Ч . Д ж . А . // Математика. 1959. Т. 3. № 1. С. 69.
5. К а т о Т . // Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
6. Е р о в е н к о В . А . // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 9. С. 784.

Еровенко Валерий Александрович – доктор физико-математических наук.
Северенчук Наталья Борисовна – аспирантка. Научный руководитель В.А. Еровенко.

УДК 513.83

Г.О. КУКРАК, В.Л. ТИМОХОВИЧ

О ПРЕДЕЛЕ ОБРАТНОГО СПЕКТРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

The article deals with the inverse limits of hyperspaces endowed with the Flachmeyer and the Vietoris topologies. The continuity of the functor of the Flachmeyer hyperspace considered on the category of T_1-spaces and perfect maps is proved. The inverse limits of the Vietoris hyperspaces in the certain more special category are considered. In this category the necessary and sufficient condition for the canonical map H: $\exp \varprojlim S \to \varprojlim \exp S$ to be a homeomorphism is obtained.

Предлагаемая работа посвящена вопросу о непрерывном продолжении функтора exp на категории более широкие, чем категория COMP компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений, и относится к тематике, берущей начало в известных работах Дж. Сигала [1], С. Сироты [2] и П. Зенора [3].

Остановимся на некоторых определениях и обозначениях. Все рассматриваемые здесь топологические пространства будем считать T_1-пространствами, а отображения – непрерывными. Для пространства X, множества $A\subset X$ и точки $x\in X$ обозначим: τ_X и φ_X – топология и соответственно семейство всех замкнутых множеств в X (вместо $A\in\tau_X$ $(A\in\varphi_X)$ будем иногда писать $A\underset{op}{\subset} X$ (соответственно $A\underset{cl}{\subset} X$)), $\tau_X(x)$ $(\tau_X(A))$ – семейство всех окрестностей точки x (соответственно множества A) в X, $[A]_X$ – замыкание A в X, $T_1(A)=\{F\in\varphi_X \mid F\cap A\neq\varnothing\}$, $T_2(A)=\{F\in\varphi_X \mid \varnothing\neq F\subseteq A\}$. Множество A называют дискретным в X, если дискретно в X семейство $\{\{a\} \mid a\in A\}$. Пространство X назовем изокомпактным, если компактно любое счетно-компактное множество $F\in\varphi_X$.

Предбазы $\{T_1(U), T_2(U) / U\in\tau_X\}$ и $\{T_1(U), T_2(V) / U, V\in\tau_X, X\setminus V$ компактно$\}$ задают на множестве $\varphi_X\setminus\{\varnothing\}$ топологии Виеториса (см., напр., [4, 5]) и соответственно Флаксмайера [6, 7]. Фиксируя на $\varphi_X\setminus\{\varnothing\}$ эти топологии, получаем соответственно пространства $\exp X$ и $\exp_F X$ (экспонента и экспонента Флаксмайера пространства X). Отметим, что при $A\in\varphi_X$ пространство $\exp A$ $(\exp_F A)$ замкнутое подпространство в $\exp X$ (соответственно в $\exp_F X$).