Г.Е. Мурзабекова, Л.К. Тажибай

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ НА ГРАФАХ

MODELLING OF HEAT PROCESSES ON GRAPHS

В данной работе исследуется модель тепловых процессов на графах. При моделировании дается оценка влияния отдельных элементов оборудования на тепловое состояние всей системы.

Ключевые слова: звездный граф, неориентированный граф, орграф, разностные уравнения, узлы сетки.

The model of heat processes on graphs are considered in this paper. During modelling the effect of particular equipment elements on the heat state of the entire system are evaluated.

Keywords: star graph, undirected graph, directed graph, difference equations, grid nodes.

Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина, Астана, Казахстан.

В последнее время теория графов стала актуальной отраслью науки. Она позволяет решать огромный круг прикладных задач экономики, инженерии, биологии, экологии [1–2]. Как известно, теория графов является математической моделью для любой системы, содержащей бинарные отношения. Благодаря развитию информационно-коммуникационных технологий появились инструменты, такие как Maple, MathCAD, MatLab, позволяющие выполнять достаточно сложные математические расчеты.

В виде графов можно изображать химические молекулы и отношения между людьми, электронные схемы и информационную структуру алгоритмов. Графами представляются транспортные схемы, нейронные сети и т.п. Свойства и алгоритмы теории графов используются в поисковых системах, распознавании и обработке изображений, а также при решении задач программирования, нейробиологии, управления рисками, логистики, а также в химической, нефтяной промышленности, инженерии, при оценке влияния отдельных элементов оборудования на тепловое состояние всей системы.

В общем смысле граф представляется как множество вершин (узлов), соединенных ребрами. Рассмотрим звездный граф $\Gamma_{1,4}$ (рис. 1 *а*), соответствующий конструкционному элементу из четырех тонких стержней с изолированной боковой поверхностью и различными теплофизическими свойствами [3].

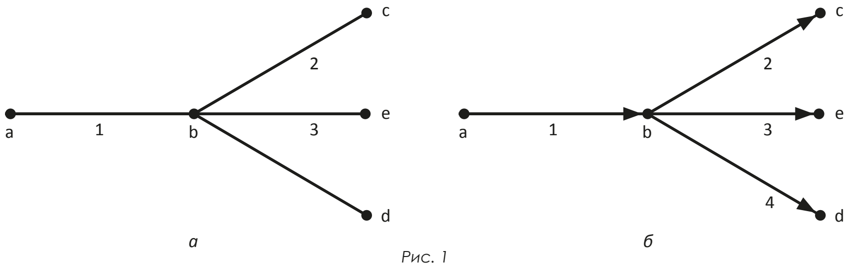

Рис. 1
Конструкционный элемент $\Gamma_{1,4}$

Задача состоит в том, чтобы определить тепловое состояние системы в различные моменты времени t при условиях: 1) в точке b идеальный тепловой контакт; 2) в точках a, c, d, e осуществляется теплообмен по закону Ньютона с соответствующими коэффициентами теплоотдачи α_1, α_2, α_3, α_4; 3) начальная температура элемента T_n, а температура внешней среды $T_в$.

Неориентированному графу, представленному на рис. 1 *а*, поставим в соответствие ориентированный граф (рис. 1 *б*). Тогда следует решить следующую краевую задачу:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \beta_m^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m^2}, \qquad m = \overline{1,4}; \\
\lambda_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = \alpha_1 (u_1|_{x_1=a} - T_e), \;\; \lambda_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=c} = \alpha_2 \left(T_e - u_2|_{x_2=c}\right); \\
\lambda_3 \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right|_{x_3=d} = \alpha_3 (T_e - u_3|_{x_3=d}), \; \lambda_4 \left.\frac{\partial u_4}{\partial x_4}\right|_{x_4=e} = \alpha_4 \left(T_e - u_4|_{x_4=e}\right); \\
\lambda_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=b} = \lambda_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=b} + \lambda_3 \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right|_{x_3=b} + \lambda_4 \left.\frac{\partial u_4}{\partial x_4}\right|_{x_4=b}; \\
u_1(b,t) = u_2(b,t) = u_3(b,t) = u_4(b,t); \\
u_m(x,t)|_{t=0} = T_n, \; m = \overline{1,4}; \\
x_1 \in [a,b], \; x_2 \in [b,c], \; x_3 \in [b,d], \; x_4 \in [b,e], \; t \in (0,T],
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где m – номер стержня, t – время, $\beta_m^2 = \dfrac{\lambda_m}{\rho_m c_m}, \lambda_m, c_m, \alpha_m$ – заданные параметры.

Введем в рассмотрение сеточный граф ω:

$$
\omega_m = \left\{ x_{mi} = i \cdot h_m, \; i = \overline{0, N_m} \right\}, \; m = \overline{1,4};
$$

$$
h_1 = \frac{b-a}{N_1}, \; h_2 = \frac{c-b}{N_2}, \; h_3 = \frac{e-b}{N_3}, \; h_4 = \frac{d-b}{N_4}
$$

$$\omega = \omega_1 \bigcup \omega_2 \bigcup \omega_3 \bigcup \omega_4$$

и сквозную нумерацию узлов сетки, представленную на рис. 2, где $K_1 = N_1$, $K_2 = K_1 + N_2$, $K_3 = K_2 + N_3$, $K_4 = K_3 + N_4$.

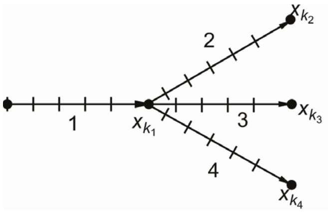

Рис. 2
Сеточный граф вторичной топологии

Тогда для рис. 1 получим разностную схему на графе вторичной топологии:

$$\lambda_1 \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h_1} = \alpha_1 \left(\hat{u}_0 - T_e\right);$$

$$\lambda_1 \frac{\hat{v} - \hat{u}_{N-1}}{h_1} = \lambda_2 \frac{\hat{u}_{K_1+1} + \hat{v}}{h_2} = \lambda_3 \frac{\hat{u}_{K_2+1} + \hat{v}}{h_3} + \lambda_4 \frac{\hat{u}_{K_3+1} - \hat{v}}{h_4};$$

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = a_1^2 \Lambda \hat{u}_i,\ i = \overline{1, K_1 - 1}, \hat{v} = \hat{u}_{1N} = \hat{u}_{20} = \hat{u}_{30} = \hat{u}_{40};$$

$$\lambda_2 \frac{\hat{u}_{K_2} - \hat{u}_{K_2-1}}{h_2} = \alpha_2 \left(T_e - \hat{u}_{K_2}\right);$$

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = a_2^2 \Lambda \hat{u}_i, i = \overline{K_1 + 1, K_2 - 1}, \lambda_3 \frac{\hat{u}_{K_3} - \hat{u}_{K_3-1}}{h_3} = \alpha_3 \left(T_e - \hat{u}_{K_3}\right); \tag{2}$$

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = a_3^2 \Lambda \hat{u}_i, i = \overline{K_2 + 1, K_3 - 1},$$

$$\lambda_4 \frac{\hat{u}_{K_4} - \hat{u}_{K_4-1}}{h_4} = \alpha_4 \left(T_e - \hat{u}_{K_4}\right),$$

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = a_4^2 \Lambda_4 \hat{u}_i, i = \overline{K_3 + 1, K_4 - 1},$$

где $\Lambda \hat{u}_i = \dfrac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}}{h_k^2}$, $u_i^n = u\left(x_i, n \cdot \tau\right)$, $k = \overline{1,4}$;

$\hat{u} = u^{n+1}, u = u^n$,

n – номер слоя,

τ – шаг по времени,

$t_n = n\tau$.

Система неявных разностных уравнений (2) аппроксимирует задачу (1) с порядком $O(\tau,h)$ и имеет матрицу при неизвестных следующей структуры:

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \times & \times & \times & 0 & \cdots & 0 & \times & 0 & \cdots & 0 & \times & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \times & \times & \times & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \times & \times & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \times & \times & \times & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \times & \times & \times & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \times & \times & \times \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \times & \times
\end{pmatrix}
$$

Эта матрица имеет обратную, но не является трехдиагональной из-за уравнения, стоящего на строчке N_1.

Для решения системы (2) на каждом ребре графа воспользуемся формулами метода левой или правой прогонки [6]:

$$
\begin{aligned}
&\hat{u}_i = P_{1i} \cdot \hat{u}_{i+1} + Q_{1i},\ i = \overline{0, K_1 - 1},\\
&\hat{u}_i = P_{2i} \cdot \hat{u}_{i+1} + Q_{2i},\ i = K_2 - 1, \ldots, K_1,\\
&\hat{u}_i = P_{2i} \cdot \hat{u}_{i+1} + Q_{2i}, i = K_3 - 1, \ldots, K_2 + 1,\\
&\hat{u}_i = P_{3i} \cdot \hat{u}_{i+1} + Q_{3i}, i = K_4 - 1, \ldots, K_3 + 1,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где P_{mi}, Q_{mi} – прогоночные коэффициенты.

Определив необходимое количество прогоночных коэффициентов, из разностного уравнения в точке b, получим формулу для вычисления температуры $\hat{v}$ на слое $n + 1$. Зная решение в этой точке, по формулам (3) определяется решение во всех узлах сеточного графа для $t = n^{\tau}$, $n = 1,\ldots,M$, $\tau \cdot M = T$.

Если число ребер графа $m \gg 1$ и $K_4 \gg 1$, то для решения соответствующей системы неявных разностных уравнений можно использовать разделение графа на домены и параллельные варианты метода прогонки или итерационные методы решения системы (2) на каждом слое по времени.

Литература

1. Мурзабекова Г.Е., Тажибай Л.К. Метод граничного управления в обратных спектральных и динамических задачах // Электронный научный журнал. 2017. № 3–1 (18). С. 25–28.
2. Берцун В.Н. Математическое моделирование на графах. Томск, 2013.
3. Берцун В.Н., Минакова Е.А. Математическое моделирование теплообмена в элементах, имеющих графовую структуру // Исследования по баллистике и смежным вопросам. Томск, 2002. С. 69–70.