Физика

УДК 530.12

И.С. СЯГЛО

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Maxwell's equations are written in noninertial frame of reference with projections on the orthonormal basis. For one class of rigid noninertial frames of reference the Maxwell's equations are written in a vector form with additional terms caused by noninertiality of frame. The rotating frame of reference in a flat space is considered as an example.

Основные уравнения электродинамики – уравнения Максвелла выполняются в инерциальной системе отсчета. Для их записи в неинерциальных системах отсчета необходим выход за рамки специальной теории относительности. Непротиворечивое рассмотрение неинерциальных систем отсчета как в отсутствие гравитирующих масс, так и в присутствии гравитации возможно только в общей теории относительности. Ее отличительной чертой является использование произвольных криволинейных координат в четырехмерном пространстве-времени, которое в общем случае является неэвклидовым и поэтому не допускает введения декартовых координат в конечной области пространства. С точки зрения наблюдателя, проводящего измерения в трехмерном пространстве, это приводит к трудностям в интерпретации результатов, полученных в четырехмерной форме с помощью методов общей теории относительности. Проблема перехода от четырехмерных величин к трехмерным решается путем 3+1-расщепления четырехмерных уравнений в некоторой системе отсчета. Разработано несколько методов задания системы отсчета в общей теории относительности [1–5]. Они также могут быть применены для описания неинерциальных систем отсчета в эвклидовом пространстве. Эти методы имеют в своей основе один и тот же физический образ – конгруэнцию мировых линий, по которым движутся тела, образующие систему отсчета. Математическая реализация этой идеи различна у разных авторов. В большинстве случаев трехмерные уравнения записываются в проекциях на координатный базис четырехмерной криволинейной системы координат, что вызывает проблемы в их использовании теми, кто не работает в области общей теории относительности.

В инерциальной системе отсчета трехмерные уравнения Максвелла записываются в векторной форме и при расчетах проектируются на оси декартовой системы координат или на ортонормированный базис ортогональной криволинейной системы координат. Поэтому желательно и в неинерциальных системах отсчета иметь уравнения Максвелла, спроектированные на ортонормированный базис. Это достигается заданием в произвольном четырехмерном пространстве-времени ортонормированного базиса – тетрады и записи уравнений в проекциях на этот базис. При этом для некоторого класса неинерциальных систем отсчета полученные данным методом трехмерные уравнения Максвелла могут быть записаны в такой векторной форме, что для перехода от них к проекциям достаточно знания формул

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах. Развитию соответствующего формализма посвящена данная статья.

Уравнения Максвелла в произвольных криволинейных координатах. Уравнения Максвелла для вакуума, записанные в рационализованной гауссовой системе единиц

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{j}, \quad \nabla \mathbf{E} = \rho,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \mathbf{H} = \mathbf{0},$$

в декартовых координатах в четырехмерной форме записываются в виде [6]:

$$\frac{\partial F^{mn}}{\partial x^n} = \frac{1}{c} j^m, \quad \frac{\partial f^{mn}}{\partial x^n} = 0. \tag{1}$$

Для того чтобы две группы уравнений имели одинаковую форму, при записи второй группы был использован тензор, дуальный тензору F^{mn}. Тензор электромагнитного поля F^{mn} и дуальный ему f^{mn} определены по формулам*:

$$F^{4a} = E^a, \quad F^{ab} = e^{abc}H_c, \quad f^{ab} = e^{abc}E_c, \quad f^{4a} = -H^a, \tag{2}$$

$$f^{km} = \frac{1}{2}e^{klmn}F_{mn}.$$

Здесь e^{klmn} и e^{abc} – соответственно четырехмерный и трехмерный антисимметричные символы Леви-Чивита ($e^{1234}=e^{123}=1$). Четырехмерный интервал в инерциальной системе отсчета в декартовых координатах используем в форме:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2 = \eta_{kn}dx^k dx^n,$$

где η_{kn} = diag(1,1,1,–1) – метрический тензор четырехмерного псевдоэвклидова пространства.

Для записи в произвольных криволинейных координатах четырехмерных уравнений Максвелла (1) нужно частную производную заменить ковариантной производной, коэффициентами связности для которой служат символы Кристоффеля, получаемые из метрического тензора $g_{\mu\nu}$ пространства-времени [6]. Обозначая ковариантное дифференцирование по координате x^μ символом ∇_μ и коэффициенты связности символом $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, запишем первое из уравнений (1) в форме:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu, \tag{3}$$

где $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \dfrac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}F^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\nu}F^{\mu\lambda}$.

Поскольку второе уравнение из (1) по виду левой части не отличается от первого уравнения, то в дальнейшем все выкладки будем производить только для первого уравнения. Все расчеты для второго уравнения проводятся аналогичным образом.

Уравнения Максвелла в форме (3) справедливы в любых системах отсчета, в том числе и в гравитационном поле. В гравитационном поле метрический тензор находится из уравнений Эйнштейна. В эвклидовом пространстве метрический тензор определяется координатным преобразованием $x^\mu = f^\mu(x^k)$ от декартовых координат к криволинейным. Их частным случаем является преобразование к ортогональным криволинейным координатам в трехмерном пространстве. Однако для получения привычного вида трех-

---

* В статье латинские индексы относятся к декартовой системе координат, греческие – к криволинейной системе координат. Начальные буквы обоих алфавитов пробегают значения *1, 2, 3*; конечные, начиная с *k* и κ, – значения *1, 2, 3, 4*. Численные значения латинских индексов подчеркиваются. Под повторяющимися одинаковыми индексами подразумевается суммирование. Исключением является только формула (20), где суммирования нет.

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.

To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

мерных уравнений Максвелла даже в ортогональных криволинейных координатах инерциальных систем отсчета нужно помимо 3+1-расщепления четырехмерных уравнений перейти в них от проекций на координатный базис к проекциям на ортонормированный базис.

Уравнения Максвелла в проекциях на ортонормированный базис. Для перехода к ортонормированному базису используем преобразование к неголономным координатам

$$dx^m = h^m_\mu dx^\mu, \quad dx^\mu = h^\mu_m dx^m. \tag{4}$$

Коэффициенты преобразования h^μ_m можно рассматривать как четыре вектора h^μ_1, h^μ_2, h^μ_3, h^μ_4 в криволинейной системе координат, поэтому их называют тетрадой. Три пространственных вектора тетрады нормируют на 1. Четвертый, времениподобный вектор тетрады нормируется на –1. Условие нормировки записывается в форме

$$\eta_{kn} = h^\mu_k h^\nu_n g_{\mu\nu}.$$

Поэтому интервал в новых координатах имеет вид интервала специальной теории относительности

$$ds^2 = \eta_{km} dx^k dx^m = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2. \tag{5}$$

В общем случае ориентация векторов тетрады произвольна и не связана с координатными линиями координатной системы. Координатное преобразование (4) неголономно, признаком чего является неравенство нулю объекта неголономности [7]:

$$\Omega^k{}_{mn} = \frac{1}{2} h^\mu_m h^\nu_n \left(\frac{\partial h^k_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h^k_\nu}{\partial x^\mu}\right). \tag{6}$$

Коэффициенты связности в неголономной системе координат с метрическим тензором η_{kn} называются коэффициентами вращения Риччи и обозначаются $\gamma^k{}_{mn}$. Вследствие того что производные от метрического тензора η_{kn} равны нулю, в нуль обращаются и скобки Кристоффеля. Коэффициенты связности полностью определяются объектами неголономности и могут быть найдены по формуле [7]:

$$\gamma^k{}_{mn} = -\Omega^k{}_{mn} + \Omega_{m}{}^{k}{}_{n} + \Omega_{n}{}^{k}{}_{m}. \tag{7}$$

Коэффициенты вращения Риччи антисимметричны по первым двум индексам и в отличие от скобок Кристоффеля не симметричны по последним двум индексам:

$$\gamma_{kmn} = \eta_{kl}\gamma^l{}_{mn}, \quad \gamma_{kmn} = -\gamma_{mkn}, \quad \gamma^k{}_{mn} - \gamma^k{}_{nm} = -2\Omega^k{}_{mn}.$$

При переходе к ортонормированному базису скобки Кристоффеля в уравнениях Максвелла (3) нужно заменить на коэффициенты вращения Риччи. В результате уравнения принимают вид:

$$\nabla_n F^{mn} = \partial_n F^{mn} + \gamma^m_{kn} F^{kn} + \gamma^n_{kn} F^{mk} = \frac{1}{c} j^n, \tag{8}$$

$$\partial_n = h^\mu_n \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

В частном случае, когда преобразование (4) задает переход к голономным координатам, коэффициенты вращения Риччи обращаются в нуль. Тогда при переходе к трехмерной записи из уравнений (8) получаются уравнения Максвелла в декартовых координатах.

Тетрадный способ задания системы отсчета. Произвольно движущуюся систему отсчета можно рассматривать как множество движущихся тел отсчета, снабженных часами. С четырехмерной точки зрения множество тел отсчета образуют конгруэнцию мировых линий. Эта конгруэнция определяется касательными к ней векторами – четырехмерными скоростями тел отсчета:

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = c\frac{dx^{\mu}}{ds}. \qquad (9)$$

Если с каждым телом отсчета связать ортонормированный базис, то в проекциях на этот базис пространственные смещения тел отсчета равны нулю: dx^{a}=0. Четырехмерная скорость тел отсчета пропорциональна вектору h^{μ}_{4} тетрады и ее пространственные компоненты в ортонормированном базисе равны нулю:

$$u^{\mu} = h^{\mu}_{k}\frac{dx^{k}}{d\tau} = h^{\mu}_{4}\frac{dx^{4}}{d\tau} = ch^{\mu}_{4}, \quad u^{k} = (0, 0, 0, c). \qquad (10)$$

Поэтому можно считать, что поле тетрады задает систему отсчета, скорость движения которой определяется вектором h^{μ}_{4}. Три пространственных вектора тетрады определяют локальную декартову систему координат. Поэтому в каждой точке пространства-времени разбиение на пространство и время производится так же, как в декартовых координатах специальной теории относительности. Однако в разных точках пространства-времени базисные векторы не параллельны, следствием чего является отличие от нуля коэффициентов связности – коэффициентов вращения Риччи.

Если не равны нулю коэффициенты вращения Риччи, содержащие индекс 4, то система отсчета неинерциальна. Покажем это. Абсолютная производная от четырехмерной скорости тел отсчета (10) дает их ускорение относительно локальной инерциальной системы отсчета. Это ускорение выражается через следующие компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$w^{a} = \frac{du^{a}}{d\tau} + \gamma^{a}_{mn}u^{m}u^{n} = c^{2}\gamma^{a}_{44}. \qquad (11)$$

Система отсчета может быть также вращающейся и деформируемой. Деформацию и угловую скорость вращения системы отсчета характеризуют тензор скорости деформации и угловая скорость вращения, вычисляемые по формулам механики сплошных сред. Они также выражаются через компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$d_{ab} = \nabla_{(a}u_{b)} = c\gamma^{4}_{(ab)},$$

$$\Omega^{a} = \frac{1}{2}e^{abc}\nabla_{b}u_{c} = -\frac{c}{2}e^{abc}\gamma^{4}_{bc}. \qquad (12)$$

Компоненты γ_{ab4} коэффициентов вращения Риччи характеризуют вращение тройки пространственных векторов ортонормированного базиса при его переносе вдоль мировой линии тела отсчета. Для доказательства этого рассмотрим абсолютный дифференциал от h^{μ}_{a}

вдоль мировой линии, спроектировав его на ортонормированный базис:

$$h_{\mu b}\frac{Dh^{\mu}_{a}}{d\tau} = \eta_{mb}\frac{D\delta^{m}_{a}}{d\tau} = \gamma_{bar}u^{r} = -c\gamma_{ab4}, \qquad (13)$$

где δ^{m}_{a} – символ Кронекера. При вычислении ковариантной производной от символа Кронекера индекс a является номером вектора и вследствие этого не дает слагаемого с коэффициентами вращения Риччи. Пространственная тройка векторов всегда может быть выбрана так, что компоненты γ_{ab4} будут равны нулю.

Переход в другую систему отсчета. Сопутствующие координаты. Интервал (5) и уравнения Максвелла (8) остаются инвариантными при применении к неголономным координатам преобразований Лоренца:

$$dx^{m'} = L^{m'}_{n}dx^{n}, \quad h^{m'}_{\mu} = L^{m'}_{n}h^{n}_{\mu}, \quad L^{m'}_{n}L^{l'}_{k}\eta_{m'l'} = \eta_{nk}. \qquad (14)$$

Полная шестипараметрическая группа преобразований Лоренца включает в себя как пространственные повороты, так и преобразования перехода к другой системе отсчета. Если скорость движения системы отсчета не является постоянной, то преобразования (14) задают переход к ускоренной сис-

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.

To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

теме отсчета. Такие преобразования называются обобщенными преобразованиями Лоренца [4].

В новой системе отсчета можно пользоваться старой координатной системой. При тетрадном задании системы отсчета преобразования координат и преобразования Лоренца, задающие переход к другой системе отсчета, в общем случае не связаны друг с другом. Однако, как правило, выбирают координатную систему, в которой тела отсчета имеют постоянные пространственные координаты. Такие координаты назовем сопутствующими координатами. В сопутствующих координатах для тел отсчета одновременно равны нулю компоненты вектора пространственного смещения относительно неголономных координат и относительно криволинейных координат: $dx^a = dx^\alpha = 0$. Поэтому коэффициенты координатного преобразования к сопутствующим координатам

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad h^{\mu'}_{k'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} h^\nu_{k'} \tag{15}$$

удовлетворяют условиям:

$$h^{\alpha'}_{4'} = 0, \quad h^{a'}_{4'} = 0. \tag{16}$$

Два условия (16) не являются независимыми, а одно вытекает из другого. Выполнения (16) всегда можно добиться с помощью координатных преобразований.

Пространственно-временное расщепление тетрадных уравнений Максвелла. Рассмотрим в общем случае переход в уравнениях (8) к трехмерной записи, не конкретизируя выбор тетрады и вид коэффициентов вращения Риччи. Для этого все суммы от 1 до 4 из (8) разобьем на суммы от 1 до 3 плюс четвертое слагаемое. Для значения индекса $m = 4$ такое разбиение при учете определений (2) даст результат

$$(\partial_a E^a + \gamma^a_{ab} E^b) + e^{abc}\gamma^4_{ab} H_c = \rho. \tag{17}$$

Поскольку трехмерный метрический тензор в ортонормированном базисе совпадает с метрическим тензором декартовой системы координат, то в уравнении (17) все индексы можно было писать на одном уровне. Мы, сохраняя однородность обозначений, продолжим писать их на разных уровнях. Для $m=a$ уравнение получается более громоздким и может быть записано в виде

$$e^{abc}(\partial_b H_c - \gamma^d_{bc} H_d) + K^a = \partial_4 E^a + \frac{1}{c} j^a, \tag{18}$$

$$K^a = (\gamma^a_{4b} - \gamma^a_{b4})E^b - \gamma^b_{4b} E^a + e^{abd}\gamma^4_{b4} H_d.$$

При получении уравнения (18) использовалось тождество

$$e^{bcd}\gamma^a_{bc} + e^{acd}\gamma^b_{cb} = -e^{abc}\gamma^d_{cb},$$

которое вытекает из условия постоянства символа Леви-Чивита: $\nabla_k e^{kad4} = 0$.

При использовании ортогональных криволинейных координат в инерциальных системах отсчета пространственные вектора тетрады направляют по касательным к координатным линиям криволинейной системы координат. Времениподобный вектор тетрады выбирается касательным к линиям времени четырехмерной системы координат. Компоненты тетрады тогда равны

$$h^m_\mu = \mathrm{diag}(h_1, h_2, h_3, 1). \tag{19}$$

На диагонали пространственного блока матрицы h^m_μ стоят коэффициенты Ламе ортогональной криволинейной системы координат. Вычисление объектов неголономности и коэффициентов вращения Риччи для тетрад (19) приводит к следующему результату. Все коэффициенты вращения Риччи, имеющие хотя бы один индекс, равный четырем, равны нулю. По-

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

этому дополнительные слагаемые в уравнениях (17) и (18) обращаются в нуль. Из пространственных компонент отличны от нуля только компоненты, имеющие два одинаковых индекса. Их значения даются формулой:

$$\gamma_{abb} = -\partial_a \ln|h_b|, \tag{20}$$

где $\partial_a = \dfrac{1}{h_a}\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

В (20) нет суммирования по повторяющимся индексам. Индексы a и α принимают одинаковые значения. Пользуясь значениями коэффициентов вращения Риччи из (20), можно убедиться, что выражения в скобках уравнений (17) и (18) совпадают с обычными формулами для дивергенции и ротора в ортогональных криволинейных координатах. Оператор дифференцирования ∂_4 равен $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}$. В результате получаются обычные уравнения Максвелла в проекциях на базис ортогональной криволинейной системы координат.

В неинерциальных системах отсчета дополнительные слагаемые в уравнениях (17) и (18) уже не будут равны нулю. Кроме того, в общем случае выражения в скобках этих уравнений не будут по форме совпадать с ротором и дивергенцией.

Частный случай неинерциальной системы отсчета. Для ряда жестких систем отсчета в эвклидовом пространстве и в стационарных полях тяготения в сопутствующих координатах тетрады имеют вид:

$$h_\mu^k = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & -\xi h_1 b_1 \\ 0 & h_2 & 0 & -\xi h_2 b_2 \\ 0 & 0 & h_3 & -\xi h_3 b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}, \quad h_k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3} & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Вычисление для них коэффициентов вращения Риччи по формулам (6) и (7) приводит к следующему результату. Пространственная часть коэффициентов вращения Риччи, как и в ортогональных криволинейных координатах, вычисляется по формулам (20). Компоненты γ_{ab4} и $d_{(ab)}$ равны нулю. Компоненты коэффициентов вращения Риччи, которые согласно (11) и (12) характеризуют ускорение и угловую скорость системы отсчета, могут быть записаны в векторной форме:

$$\mathbf{w} = c^2 \nabla \ln\xi, \quad \Omega = \tfrac{1}{2} c\xi[\nabla \times \mathbf{b}]. \tag{22}$$

В (22) и в последующих формулах при вычислении градиента и ротора коэффициенты Ламе берутся из пространственного блока тетрады (21). Компоненты вектора **b** содержатся в четвертой строке тетрады h_k^μ из (21). Дифференциальные операторы ∂_a и ∂_4, входящие в уравнения (17) и (18), для тетрад (21) записываются в виде:

$$\partial_a = \frac{1}{h_a}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{b_a}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_4 = \frac{1}{c\xi}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Подставляя вычисленные величины в уравнения (17) и (18), получим уравнения, которые можно записать в следующей векторной форме:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c\xi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}[\mathbf{H} \times \mathbf{w}] - \frac{1}{c}\mathbf{b} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{23}$$

$$\nabla \mathbf{E} = \rho + \frac{2}{c}\Omega\mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{b}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{24}$$

Вторая группа уравнений Максвелла получается из (23) и (24) заменой $\mathbf{H} \to \mathbf{E}$, $\mathbf{E} \to -\mathbf{H}$. Она имеет вид

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.

To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c\xi}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\frac{1}{c^2}[\mathbf{E}\times\mathbf{w}]-\frac{1}{c}\mathbf{b}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{25}$$

$$\nabla\mathbf{H}=-\frac{2}{c}\Omega\mathbf{E}-\frac{1}{c}\mathbf{b}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{26}$$

Дополнительные слагаемые в уравнениях (23)–(26) вызваны неинерциальностью системы отсчета. Они обращаются в нуль при переходе к инерциальной системе отсчета.

Если ввести новые расчетные величины по формулам

$$\tilde{\mathbf{H}}=\xi\mathbf{H},\ \ \tilde{\mathbf{E}}=\xi\mathbf{E},\ \ \tilde{\mathbf{j}}=\xi\mathbf{i},\ \ \tilde{\mathbf{D}}=\mathbf{E}-[\mathbf{b}\times\tilde{\mathbf{H}}],\ \ \tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{H}+[\mathbf{b}\times\tilde{\mathbf{E}}], \tag{27}$$

то система уравнений (23)–(26) принимает вид уравнений Максвелла в инерциальной системе отсчета:

$$\nabla\times\tilde{\mathbf{H}}=\frac{1}{c}\tilde{\mathbf{j}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{D}}}{\partial t},\ \ \nabla\tilde{\mathbf{D}}=\rho,$$

$$\nabla\times\tilde{\mathbf{E}}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t},\ \ \nabla\tilde{\mathbf{B}}=0.$$

Если вектор **b** отличен от нуля, то последние два равенства в (27) по форме представляют собой частный случай уравнений связи для гиротропных сред [9]. Таким образом, неинерциальность системы отсчета в рассматриваемом случае можно учесть введением дополнительных членов в уравнения Максвелла или усложнением уравнений связи. Однако следует учитывать, что только **E** и **H** являются величинами, измеряемыми на опыте.

Вращающаяся система отсчета в эвклидовом пространстве. В инерциальной системе отсчета выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z. Тетрады для нее имеют вид:

$$h^k_\mu=\mathrm{diag}(1,r,1,1),\ \ h^\mu_k=\mathrm{diag}(1,\frac{1}{r},1,1).$$

Для перехода к вращающейся вокруг оси OZ системы отсчета применим локальное преобразование Лоренца вида:

$$dx^{2'}=\gamma(dx^2-\frac{\omega r}{c}dx^4)=\gamma(rd\varphi-\frac{\omega r}{c}cdt),$$

$$dx^{4'}=\gamma(dx^4-\frac{\omega r}{c}dx^2)=\gamma(cdt-\frac{\omega r}{c}rd\varphi),$$

$$\gamma^{-1}=\sqrt{1-(\frac{\omega r}{c})^2}.$$

Преобразование координат $\varphi=\varphi'+\omega t'$, $t=t'$ вводит сопутствующую систему координат. В сопутствующих координатах тетрады имеют форму (21):

$$h^{k'}_{\mu'}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\gamma r&0&-\gamma r^2\frac{\omega}{c}\\0&0&1&0\\0&0&0&\frac{1}{\gamma}\end{pmatrix}\qquad h^{\mu'}_{k'}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{\gamma r}&0&0\\0&0&1&0\\0&\gamma\frac{\omega r}{c}&0&\gamma\end{pmatrix} \tag{28}$$

С помощью тетрад (28) рассчитываем все величины, необходимые для записи уравнений Максвелла во вращающейся системе отсчета:

$$h_1=1,\ h_2=\gamma r,\ h_3=1,\ \zeta=\frac{1}{\gamma},$$

$$\mathbf{w}=(-\gamma^2\omega^2 r,0,0),\ \ \mathbf{b}=(0,\frac{1}{c^2}\gamma\omega r,0,0),\ \Omega=(0,0,\gamma^2\omega).$$

1. Зельманов А.Л. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. С. 815.
2. Schmutzer E. // Z. f. Naturforschung. 1964. Vol. 6B. № 6.
3. Estabrook F.B., Wahlquist D. // J. Math. Phys. 1964. Vol. 5. P. 1629.
4. Иваницкая О.С. Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Мн., 1969.
5. Сягло И.С., Иваницкая О.С. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 5. С. 68.

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.

To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1988.
7. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. М., 1965.
8. Сягло И.С. // Гравитация и электромагнетизм. Мн., 1981. С. 29
9. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. М., 1976.

Поступила в редакцию 30.11.2000

Сягло Иван Степанович – кандидат физико-математических наук.

УДК 535.13; 538.566

А.Н. ФУРС, Л.М. БАРКОВСКИЙ

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ОДНООСНОГО КРИСТАЛЛА И ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Surface electromagnetic states in uniaxial crystals with positive definite dielectric permittivity tensors are investigated. For arbitrary cut planes and directions of wave propagation at the interface of uniaxial crystal and an isotropic medium characterized by the angles α and β the closed equations are derived which determine existence regions of surface polaritons in the coordinate plane (α, β).

Оптико-механические аналогии издавна используются в современной науке. В [1] установлена аналогия между волновыми уравнениями, описывающими распространение поверхностных электромагнитных и акустических волн. Эти уравнения включают в себя тензор четвертого ранга c_{iklm}, являющийся тензором модулей упругости для волн в акустической среде и выражающийся через компоненты тензора диэлектрической проницаемости ε для электромагнитных волн в анизотропной диэлектрической среде. Стро была обнаружена связь между поверхностными акустическими волнами и однородно движущимися линейными дислокациями [2], что в свое время послужило толчком к разработке новых методов в теории поверхностных акустических волн и привело к установлению Барнеттом и Лоте теорем существования и единственности для таких волн [3–5]. Формализм Стро является мощным орудием при описании целого "букета" волновых акустических полей в сложных бикристаллических структурах типа слой на подложке, он хорошо "приспособлен" для исследования резонансного возбуждения поверхностных волн в таких структурах [6, 7]. Таким образом, три класса физически различных явлений (однородно движущиеся линейные дислокации, поверхностные акустические волны, поверхностные электромагнитные волны, или поляритоны) описываются подобными по своей математической структуре уравнениями. Поэтому неудивительно, что основные идеи, изложенные в [3–5], оказываются применимыми и в теории поверхностных поляритонов [1, 8]. В частности, в [8] нами сформулированы общие условия существования поверхностных поляритонов на границе между анизотропной диэлектрической и идеально проводящей средами и между анизотропной и изотропной средами в предположении, что соответствующие тензоры диэлектрических проницаемостей ε положительно определены. Существенно, что для возбуждения поверхностных электромагнитных волн в средах с положительно определенными диэлектрическими проницаемостями хотя бы одна из пограничных сред должна быть анизотропной. Мы рассматриваем волновое распространение в наиболее простой диэлектрической среде – поперечно-изотропной (одноосной), граничащей с изотропной средой. Целью настоящей работы является изучение поверхностных поляритонов в таких средах при произвольных срезах на основе установленных ранее общих условий существования [8]. Отметим, что для поверхностных поляритонов условия существования приводят к качественно иным физическим результатам по сравнению с поверхностными акустическими волнами. Если возбуждение последних возможно для большинства ориентаций плоскостей срезов и направлений распространения, то возбуждение поверхностных поляритонов – только для некоторых исключительных направлений [8].

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm