

ON SOME INTERPOLATION FORMULAS OF HERMITE TYPE
WITH ONE NODE OF THE SECOND MULTIPLICITY
AND FRACTIONAL RIEMANN – LIOUVILLE DERIVATIVES

Horn D. D., Ignatenko M. V.

KPMG AG Wirtschaftsprüfungsgesellschaft, Berlin, Germany,

e-mail: Darya.yanovich@gmail.com,

Belarus State University, Minsk, Belarus, e-mail: ignatenkomv@bsu.by

We consider operators of fractional differentiation of Riemann – Liouville that are defined in the class $AC^{[\alpha]}[a, b]$ of functions $f(x)$ having an absolutely continuous derivative of the order $[\alpha]$ on the segment $[a, b]$, where $[\alpha]$ is the integer part of the number α . The fractional derivative $(D_{a+}^{\alpha} f)(x) \equiv f^{(\alpha)}(x)$ of Riemann – Liouville of an arbitrary order α ($\alpha > 0$) of the function $f(x)$ is given [1] by the equality

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (x > a, n = [\alpha] + 1), \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Theorem 1. For the algebraic polynomial of the first degree

$$H_1(x) = \frac{1}{\alpha(x_0 - a)} [x_0 - x + \alpha(x - a)] f(x_0) + \frac{\Gamma(2-\alpha)(x - x_0)}{\alpha(x_0 - a)^{1-\alpha}} f^{(\alpha)}(x_0), \quad (1)$$

an order $0 < \alpha < 1$, a node $x_0 \neq a$ and a function $f(x) \in AC[a, b]$, the equalities

$$H_1(x_0) = f(x_0), \quad H_1^{(\alpha)}(x_0) = f^{(\alpha)}(x_0) \quad (2)$$

are satisfied. The interpolation formula (1) is invariant (exact) for the polynomials $f(x) \equiv P_1(x) = b_0 + b_1 x$ ($b_0, b_1 \in \mathbb{C}$).

Next, we assume that $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, $x_0 \in (a, b]$ and a function $f(x) \in AC^{[\alpha]}[a, b]$.

Theorem 2. The polynomial of algebraic type

$$H_1(x) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)^{\alpha-1}} (x - a)^{\alpha-1} - \frac{\Gamma(\alpha)(x_0 - a)}{\Gamma(2\alpha)} [(x - a)^{\alpha-1} - (x_0 - a)^{-\alpha} (x - a)^{2\alpha-1}] f^{(\alpha)}(x_0) \quad (3)$$

satisfies the interpolation conditions (2). The formula (3) is exact for the functions $f(x) \equiv P(x) = a_1(x - a)^{\alpha-1} + b_1(x - a)^{2\alpha-1}$ ($a_1, b_1 \in \mathbb{C}$).

Interpolation formulas of this type with a larger number of nodes have been constructed.

References

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential Equations. – Amsterdam: Elsevier Science, 2006. – 541 p.

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ АНОМАЛЬНОГО ТРАНСПОРТА В КЛЕТОЧНЫХ МЕМБРАННЫХ СТРУКТУРАХ

Бурый А. О., Тимощенко И. А., Абрашина-Жадаева Н. Г.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

e-mail: artsiom.bury@gmail.com

Аномальная диффузия наблюдается во многих физических, химических и биологических системах [1]. Особый интерес представляет изучение и моделирование аномальной диффузии в мембранах живых клеток. По современным представлениям мембрана описывается динамической твердо-каркасной жидко-мозаичной доменно-рафтовой моделью [2]. Есть предположение, что именно рафтовое строение мембраны отвечает за аномальную диффузию в мембранах живых клеток [3].

Аномальная субдиффузия, наблюдающаяся в живых клетках, описывается обобщенным законом Фика, который приводит к уравнению в дробных производных [4]:

$$\left({}^C D_{0+,t}^\beta C\right)(x, y, z, t) = \Delta C(x, y, z, t), \quad (1)$$

где ${}^C D_{0+,t}^\beta C$ – дробная производная Герасимова-Капуто по времени:

$$\left({}^C D_{0+,t}^\beta C\right)(x, y, z, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{C(x, y, z, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}, \quad 0 < \beta < 1. \quad (2)$$

Для решения данного уравнения используется метод декомпозиции области. Данный метод строится с целью разбиения исходной задачи в сложных областях на слабо связанные между собой задачи в отдельных более простых подобластях, в которых задачи реализуются независимо и затем объединяются в общее решение [5]. Такие алгоритмы, как правило, ориентированы на параллельное вычисление на ЭВМ.

Библиографические ссылки

1. Eab C.H., Lim. S. C. Accelerating and retarding anomalous diffusion // J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012).
2. Черенкевич, С. Н. Биологические мембраны : учеб. пособие для студентов физ., биол., биохим., биотехн. специальностей / С. Н. Черенкевич, Г. Г. Мартинович, А. И. Хмельницкий. – Минск : БГУ, 2009. – 184 с.
3. Nicolau D.V. Jr, Hancock J.F., Burrage K. Sources of Anomalous Diffusion on Cell Membranes: A Monte Carlo Study // Biophys J. 2007 Mar 15; 92(6): 1975–1987.
4. Учайкин В. В. Субдиффузия и устойчивые законы // ЖЭТФ, 1999, том 115, вып. 6, с. 2113–2132.
5. Абрашина-Жадаева Н. Г., Самарская Е.А. Метод декомпозиции области решения сеточных параболических задач // Дифференциальные уравнения, 1999. Т. 35, №2. С. 225–231.