О СПЕКТРАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ

Расолько Г. А., Шешко С. М., Шешко М. А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
Люблин, Польша
e-mail: rasolka@bsu.by, SheshkaSM@bsu.by

В теории крыла конечного размаха, контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt = f(x), \qquad -1 < x < 1,$$

которое называется уравнением Прандтля [1]. Здесь $B(x)$, $f(x)$ – известные функции из класса $C[-1,1]$, $\Gamma(x)$ – искомая функция.

Число работ, посвящённых этому уравнению, огромно. Значительная часть публикаций, начиная с самой первой, относится к вопросу разработки и обоснования приближенных методов решения данного уравнения. Среди приближенных методов наиболее распространённым является метод Мультхоппа [2]. В [3] предложена и обоснована вычислительная схема для этого уравнения в одном из классов функций по Мусхелишвили, близкая по структуре к схеме Мультхоппа.

В настоящей работе предлагаются и обосновываются методом разностных схем новые вычислительные схемы для численного решения данного уравнения в разных классах функций по Мусхелишвили. Первоначально в каждом из классов уравнение сводится к равносильному уравнению с логарифмической особенностью. Указываются условия разрешимости полученного уравнения Фредгольма. При построении квадратурной формулы применяется интерполяционный многочлен для подынтегральной функции по узлам Чебышёва первого рода, основываясь на результате теоремы 7.9 из [4]. Данный вид интерполирования позволил упростить квадратурные формулы, применив к сингулярным интегралам от многочленов Чебышёва известные спектральные соотношения.

Численные просчёты проводились на модельном уравнении, имеющем решение

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}\,\operatorname{arcth}\left(\sqrt{1-x^2}/\sqrt{2}\right) \text{ при } B(x) = (x^2+3)/(x^2+2), \quad \Gamma(\pm 1) = 0,$$

$$f(x) = (x^2+2)/(x^2+3)\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}\,\operatorname{arcth}\left(\sqrt{1-x^2}/\sqrt{2}\right)\right) - \sqrt{2}/(1+x^2) + 1.$$

Получено, что для всех четырёх вычислительных схем точное решение отличается от приближенного в системе точек $x = -0{,}99, -0.98, \ldots, 0{,}99$ при $n = 34$ не более чем на $1{,}5 \cdot 10^{-15}$. Числа обусловленности матриц систем при этом не превосходят 50.

Библиографические ссылки

1. Prandtl L. // Nach. Kgl. Ges. Wiss. Math. Phys. 1918. P. 451–470.
2. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М., 1973.
3. Шешко М.А., Расолько Г.А., Мастяница В.С. К приближенному решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля // Дифференц. уравнения. 1993. – Т. 29. № 9. – С. 1550 – 1560.
4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm