1) $C1+C2\le 1{,}176L$ или $BS+ES2<=1{,}176L$. Пусть $Y=1{,}176L$ и $C1+C2\le Y$. Чтобы гарантировать $(C1+C2+F)/C^*>1{,}264$, из $C^*\le 3F$ имеем $F\le Y/2{,}792$. Поэтому $(C1+C2+F)/C^*\le(1{,}358166Y)/1{,}264<1{,}264$.

2) $C1+C2>1{,}176L$ и $BS+ES2>1{,}176L$. Рассмотрим возможное назначение $BS+ES2+F = BS+C1+(ES1+F-C1)$, но из $(F+C1+C2)/(3^*F)>1{,}264$ получаем $C1\ge 1{,}396F$ или $F<0{,}7164C1$, откуда $ES1+F-C1\le 0{,}5L-0{,}2836^*C1$. Следовательно, $(ES1+F-C1)/C^*<0{,}264$.

Доказательство завершено.

1. Seiden S., Sgall J., Woeginger G // Operations Research Letters. 2000. 27. P. 215.

Поступила в редакцию 23.04.2003.

Владимир Михайлович Котов **– кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой дискретной математики и алгоритмики.**

УДК 517.926

А.А. ЛЕВАКОВ

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The higher mean square characteristic exponent of stochastic differential system is introduced. The central exponent of linear unperturbed differential system is the attainable upper bound of the mobility for higher mean square characteristic exponent of stochastic perturbed system.

Введенное А.М. Ляпуновым понятие характеристического показателя линейной нестационарной системы является ключевым в первом методе Ляпунова исследования устойчивости обыкновенных дифференциальных систем. Характеристические показатели Ляпунова стохастических систем впервые изучались В.М. Милионщиковым [1], который установил, что почти для всякой линейной системы почти все близкие к ней системы имеют показатели, близкие к ее показателям. Эти исследования были продолжены Нгуен Динь Конгом [2, 3] и др.

В данной работе вводится старший среднеквадратический характеристический показатель стохастической дифференциальной системы Ито и показано, что, как и для обыкновенных систем, центральный показатель линейной невозмущенной дифференциальной системы является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя возмушенной системы со случайными возмущениями, что дает возможность использования первого метода Ляпунова и для стохастических систем Ито.

Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$dx(t) = A(t)x(t)\,dt + f(t, x(t))\,dW(t), \qquad (1)$$

где $A\colon R_+\to R^{d\times d}$, $f\colon R_+\times R^d\to R^{d\times r}$ – непрерывные ограниченные функции. Для любого $x_0\in R^d$ уравнение (1) имеет слабое решение с начальным условием x_0 [4].

Определение. Число $\text{æ}(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sup(2t)^{-1}\ln \mathrm{E}(\|x(t)\|^2)$ называем верхним среднеквадратическим характеристическим показателем слабого решения $x(t)$ уравнения (1), а число $\sup\limits_{x\in A}\text{æ}(x)=\Lambda$, где A – множество всех слабых решений уравнения (1), – старшим среднеквадратическим показателем уравнения (1).

Число Ω' называется верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любой функции f, удовлетворяющей условию $\|f(t, x)\|\leq\delta\|x\|$, $\forall(t, x)\in R_+\times R^d$, старший среднеквадратический показатель системы (1) не превосходит $\Omega'+\varepsilon$.

Число Ω называется достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического характеристического показателя системы (1), если оно является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя, и для любых $\varepsilon>0$, $\delta>0$ найдется система (1) с функцией f, удовлетворяющей неравенству $\|f(t, x)\|<\delta\|x\|$, $\forall(t, x)\in R_+R^d$, и со старшим среднеквадратическим показателем не меньшим, чем $\overline{\Omega}-\varepsilon$.

Теорема. *Верхний центральный показатель* [5] *системы*

$$dx(t)=A(t)x(t)dt \tag{2}$$

является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1).

Верхний центральный показатель диагональной системы (2) *является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы* (1).

Доказательство. Пусть $R(t)$ – верхняя функция для системы (2), т. е. $\forall\varepsilon$, $\exists D_\varepsilon$, что $\|Y(t)Y^{-1}(\tau)\|\leq D_\varepsilon \exp(\int_\tau^t (R(s)+\varepsilon/2)\,ds)$, где $Y(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (2), тогда для любого слабого решения системы (1) с функцией f, удовлетворяющей неравенству $\|f(t,x)\|<\varepsilon\|x\|/2$, $\forall(t, x)\in R_+R^d$, используя представление решения из [6], имеем

$$E(\|x(t)\|^2)<2D_\varepsilon^2 E(\|x(0)\|^2)\exp\left(2\int_0^t (R(\tau)+\varepsilon)d\tau\right),$$

откуда вытекает первое утверждение теоремы.

Рассмотрим систему

$$dx(t) = A(t)x(t)\,dt + \Phi x(t)\,dW(t), \tag{3}$$

где $A(t)=\mathrm{diag}[p_i(t)]$, $p_i(t)$, $i=1, ..., d$, $t\geq0$, – непрерывные ограниченные функции, Φ – $(d\times d)$-матрица, у которой все элементы, находящиеся под главной диагональю, равны $\delta>0$, элемент, стоящий в первой строке и в последнем столбце, тоже равен δ, а остальные элементы нулевые, $W(t)$ – одномерное F_t-броуновское движение, заданное на вероятностном пространстве (Ω, F, P), с потоком F_t. Используя метод последовательных приближений [7, с. 171], d-компоненту $x_d(t)$ сильного решения $x(t)$ системы (3) с начальным условием $x(0)=S\in R^d$, $S_i=s>0$, $i=1, ..., d$, можно представить в виде

$$x_d(t)=s\exp\left(\int_0^t pd(\tau)d\tau\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\delta^r sJ_d^r(t), \tag{4}$$

где

$$J_d^r(t)=\int_0^t\int_0^{t_r}\int_0^{t_{r-1}}\ldots\int_0^{t_2}\exp\left(\int_0^{t_1}p_{d-r}(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t_2}p_{d-r+1}(\tau)d\tau+\ldots+\int_{t_r}^{t}p_d(\tau)d\tau\right)dW(t_1)dW(t_2)\ldots dW(t_r),$$

$d-i$ равняется $d-m$ для $i=kd+m$, $k\in N$, $0\leq m<d-1$. Легко увидеть, что

$$E(J_d^r J_d^m) = \begin{cases} \int_0^t \int_0^{t_r} \int_0^{t_{r-1}} \ldots \int_0^{t_2} \exp\left(2\left(\int_0^{t_1} p_{d-r}(\tau)d\tau + \ldots + \int_{t_r}^{t} p_d(\tau)d\tau\right)\right) dt_1 \ldots dt_r, \ m = r, \\ 0, \ r \neq m. \end{cases}$$

Из соотношений (4), (5) следует, что

$$E(|x_d(t)|^2) \geq s\delta^r \int_0^t \int_0^{t_r} \int_0^{t_{r-1}} \ldots \int_0^{t_2} \exp\left(2\left(\int_0^{t_1} p_{d-r}(\tau)d\tau + \ldots + \int_{t_r}^{t} p_d(\tau)d\tau\right)\right) dt_1 \ldots dt_r.$$

Теперь для завершения доказательства надо повторить соответствующую часть доказательства теоремы 13.3.1 из [5].

1. Милионщиков В.М. // Мат. заметки. 1970. Т. 7. № 4. С. 503.
2. Конг Нгуен Динь // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 3. С. 420.
3. Cong Nguyen Dink // Stoch. Dyn. 2001. Vol. 1. № 1. P. 127.
4. Леваков А.А. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1041.
5. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
6. Леваков А.А. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 213.
7. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионное процессы. М., 1986.

Поступила в редакцию 06.06.2003.

Анатолий Афанасьевич Леваков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.