УДК 519.214.5

А.С. ШМУРАТКО

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Given a strongly mixed sequence of random variables with mean zero and moments of order greater than three. We obtain the asymptotic expansion of length two for the distribution function of the normalized sum of random variables. The case when the strong mixing coefficient decreases exponentially is investigated. The theorem requires that the characteristic function of the sum be small in the specified interval.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин с $EX_j=0$, $j>1$, и коэффициентом сильного перемешивания α. Обозначим

$$\sigma_n^2 = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2, \quad S_n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad F_n(x) = P(S_n < x),$$

$$G_n(x) = \Phi(x) - \frac{ES_n^3}{6}\varphi(x)(x^2-1), \quad \rho(F_n, G_n) = \sup_{x\in R}\left|F_n(x) - G_n(x)\right|,$$

$$f_n(t) = Ee^{itS_n}, \quad g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dG_n(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 - \frac{it^3}{6}ES_n^3\right),$$

где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – функция распределения и плотность стандартного нормального распределения соответственно.

В работе [1] мы получили верхние оценки для величины $\rho(F_n, G_n)$ в случае степенного убывания коэффициента $\alpha(n)$. В настоящей работе рассматривается случай, когда $\alpha(n)$ убывает экспоненциально.

Введем следующие условия:

$$\sup_k E\left|X_k\right|^{3+\delta} \le C_1 < \infty, \tag{1}$$

$$\sigma_n^2 \ge C_2 n, \tag{2}$$

$$\alpha(n) < C_3 e^{-\beta n}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\left[C_4\varepsilon_n \frac{n}{\ln^{7/2} n},\ C_5\varepsilon_n^{-1}\right]} \left|\frac{f_n(t)}{t}\right| dt < C_6\varepsilon_n, \tag{4}$$

$$\left|f_n(t)\right| \le C_{\cdot}\left|t\right|^{-\tau}. \tag{4'}$$

Теорема. *Пусть для последовательности* $X_1, X_2, \ldots$ *существуют такие постоянные* $C_i>0$ $\left(i=\overline{1,6}\right)$, $\delta\in(0, 1]$, $\beta>0$, *и такая величина* ε_n, $\frac{(\ln n)^{2+\delta}}{\left(\sqrt{n}\right)^{1+\delta}} \le \varepsilon_n \le \left(\sqrt{n}\right)^{-1-\varepsilon}$ *для некоторого* $\varepsilon>0$, *что для всех* $n\ge2$ *выполняются условия* (1) – (4). *Тогда найдется такое* $B>0$, *не зависящее от* n, *что для всех* $n\ge2$

$$\rho(F_n, G_n) < B\varepsilon_n. \tag{5}$$

Обозначим $a\vee b=\max(a, b)$ и положим

$$\varepsilon_n = \frac{(\ln n)^{2+\delta}}{\left(\sqrt{n}\right)^{1+\delta}} \vee \left(\frac{\ln^{5/2} n}{n}\right)^{\frac{\tau}{\tau+1}}. \qquad (6)$$

Приведенное далее следствие аналогично теореме из [1].

Следствие. Пусть для последовательности X_1, X_2, … *существуют такие постоянные* $C_i>0$ $\left(i=\overline{1,6}\right)$, $\delta\in(0, 1]$, $\beta>0$, $\tau>1$, *что для всех* $n>2$ *выполняются условия* (1) – (3) *и условие* (4′) *в области* $|t|\in\left[C_4\varepsilon_n\frac{n}{\ln^{5/2} n},\ C_5\varepsilon_n^{-1}\right]$,

где ε_n *определено в* (6). *Тогда найдется такое* $B>0$, *не зависящее от* n, *что для всех* $n>2$

$$\rho\left(F_n,\ G_n\right)<B\varepsilon_n.$$

При доказательстве теоремы используем результаты работы [1].

Положим $s=3+\delta$, $s_0=\min(s-1,\ 3)$. Пусть для некоторых $\delta>0$ ($s>3$) и $\beta>0$ выполняются условия (1) и (3). Тогда можно повторить все рассуждения работы [1] до соотношения (14) включительно.

Итак, имеет место (14) [1]. Для оценки коэффициентов Q_i в указанном соотношении применим условия (2) и (3) (здесь и далее используются формулы только настоящей работы), а также неравенства

$$\sum_{k=m+1}^{n} e^{-\gamma k}\le c_1(\gamma)e^{-\gamma m},\qquad \sum_{k=m+1}^{n} ke^{-\gamma k}\le c_2(\gamma)me^{-\gamma m}.$$

Здесь $\gamma>0$, $0<m<n$, постоянные $c_i(\gamma)$ зависят только от γ. Кроме того, $\left|ES_n^3\right|<Bn^{-1/2}$. В результате получим, что для всех достаточно больших n

$$\rho\left(F_n,\ G_n\right)<B\left\{e^{-\gamma_2 m}+\frac{m}{\sqrt{n}}e^{-\gamma_3 m}+\frac{m^{s_0}}{\left(\sqrt{n}\right)^{s_0-1}}+\frac{1}{n}+\sqrt{n}e^{-\gamma_1 m}T+\right.$$

$$\left.+\frac{Tm^{5/2}}{n}+\left(\frac{Tm}{\sqrt{n}}\right)^{\left\lfloor\frac{R-1}{2}\right\rfloor}m+\int\limits_{T<|t|<U}\left|\frac{f_n(t)-g_n(t)}{t}\right|dt+\frac{1}{U}\right\}. \qquad (7)$$

Здесь выбором величины $R>3$, функций $T(n)>0$, $U(n)>0$ и $m(n)\in\mathrm{N}$ мы можем распоряжаться, но с условием выполнения соотношения $T<B_0\sqrt{n}m^{-\frac{s_0}{s_0-1}}$; B и B_0 – некоторые положительные ограниченные постоянные, не зависящие от n, m, T, U; $\gamma_i=\beta\frac{s-i}{s}$ $\left(i=1,\ 2,\ 3\right)$.

Положим $m=\lfloor A_0\ln n\rfloor$. За счет выбора постоянной A_0 все слагаемые в (7), содержащие экспоненту, можно сделать достаточно малыми. Положим также

$$T=C_4\varepsilon_n\frac{n}{\ln^{5/2} n},\quad U=C_5\varepsilon_n^{-1}$$

и возьмем такое $R=R(\varepsilon)>3$, чтобы выполнялось соотношение $\left\lfloor\frac{R-1}{2}\right\rfloor\varepsilon>2$.

Тогда из (7) с учетом (4) и определения ε_n нетрудно получить (5) и доказательство теоремы.

1. Шмуратко А.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3. С. 52.

Поступила в редакцию 05.02.2003.

Александр Сергеевич Шмуратко – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Н.М. Зуев.

УДК 519.95

В.М. КОТОВ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧАХ РАЗБИЕНИЯ

We present a new approach for solving on-line version of partitioning problems using dynamic lower bounds.

Рассматривается следующая задача теории расписаний: множество $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ работ обслуживается в системе из $M=\{1, 2, \ldots, m\}$ параллельных процессоров. В любой момент времени каждая работа обслуживается не более чем одним прибором и каждый прибор обслуживает не более одной работы одновременно. Требуется построить расписание выполнения всех работ, при котором минимизируется общее время завершения их обслуживания. В on-line-версии задачи работы поступают друг за другом, очередная работа должна быть сразу назначена на прибор, после чего уже нельзя что-либо изменить. И только затем поступит новая работа или информация, что работ больше нет. Качество работы алгоритмов для подобного рода задач оценивается как предел отношения значения построенного решения к значению оптимального решения соответствующей off-line-версии (все ее входные параметры известны) в пространстве всех индивидуальных задач.

До сих пор не было лучшей стратегии распределения работ по процессорам, чем назначение работы на наименее загруженный процессор, когда известно, что длительность следующей работы не превышает длительность предыдущей [1]. Оценка алгоритма «в минимально загруженный» равна $4/3-1/(3m)$. В работе предлагается принципиально новый алгоритм, оценка которого равна 1,264 для любого m.

Важнейшим фактором при оценке точности приближенного алгоритма является величина нижней оценки значения целевого функционала. Традиционно в качестве таковой используется средняя загрузка процессоров или максимальная длительность работы. Предлагаемый алгоритм состоит из нескольких стадий, при этом на каждой из них используется своя нижняя оценка значения целевого функционала и своя стратегия загрузки процессоров. Пусть C^* соответствует величине оптимального решения, S – величине построенного решения, а L – нижней границе. Через $w(B)$ будем обозначать суммарную загрузку процессора B, и если она равна 0, то такой процессор будем называть *пустым*.

Стадия 1. В качестве L используется длительность первой работы p_1: $L=p_1$.

Пока $i\leq m$ выполнять: