Математика и информатика

УДК 519.24

Н.Н. ДЕМЕШ, С.Л. ЧЕХМЕНОК

ПРИМЕНЕНИЕ СГЛАЖЕННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ К ОЦЕНИВАНИЮ СПЕКТРОВ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

In this article a speed of convergence in probability of a smoothed periodogram to a spectral density of discrete stable process is investigated.

Рассмотрим комплекснозначный стационарный симметричный устойчивый с характеристическим показателем α, $0<\alpha<2$, случайный процесс $X(t)$, $t\in Z=\{0, \pm1, \pm2\ldots\}$, имеющий спектральное представление

$$X(t)=\int_{\Pi} e^{it\lambda} d\xi(\lambda), \tag{1}$$

где $\xi(\lambda)$ – комплекснозначный α-устойчивый случайный процесс с независимыми приращениями такой, что

$$\left[M\left|d\xi(\lambda)\right|^{p}\right]^{\frac{\alpha}{p}}=k(p,\alpha)\varphi(\lambda)d\lambda,\ 0<p<\alpha,\ \lambda\in\Pi=[-\pi;\pi],$$

где $k(p, \alpha)$ – некоторая положительная константа, а $\varphi(\lambda)$ – неотрицательная четная 2π-периодическая функция, которую будем называть спектральной плотностью процесса $X(t)$. При $\alpha=2$ функция $\varphi(\lambda)$ является спектральной плотностью в обычном смысле, а при $0<\alpha<2$ в задачах прогнозирования и фильтрации данная функция играет ту же роль, что и спектральная плотность для процессов второго порядка. Пусть

$$X(0), X(1)\ \ldots\ X(T-1) \tag{2}$$

– T последовательных наблюдений за процессом $X(t)$, $t\in Z$, $T=2k(n-1)+1$, $n\in N=\{1, 2, \ldots\}$, $k\in\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup N$.

В качестве оценки функции $f(\lambda)=[\varphi(\lambda)]^{\frac{r}{\alpha}}$, $\lambda\in\Pi$, рассмотрим сглаженную периодограмму вида

$$\hat{f}_T(\lambda)=\int_{\Pi} W_T(\nu)I_T(\lambda+\nu)d\nu, \tag{3}$$

где спектральное окно $W_T(\upsilon)$ представляет собой ядро Фейера, т. е.

$$W_T(\upsilon)=\frac{1}{2\pi M_T}\frac{\sin^2\left(\frac{M_T\upsilon}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\upsilon}{2}\right)},$$

в котором

$$M_T\in N\,,\ M_T\xrightarrow[T\to\infty]{}\infty\,,\ \text{но}\ \frac{M_T}{T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0\,,$$

а $I_T(\lambda)$ – модифицированная периодограмма наблюдений (2) за процессом $X(t)$, $t\in Z$, вида

$$I_T(\lambda)=C(p,\alpha)|d_T(\lambda)|^p.$$

Здесь

$$d_T(\lambda)=A_T\,\mathrm{Re}\sum_{m=-k(n-1)}^{k(n-1)}e^{-i\lambda m}h_k(m,n)X(m+n)\,,$$

$$A_T=\left[\int_\Pi\left|H^{(T)}(\lambda)\right|^\alpha d\lambda\right]^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$H^{(T)}(\lambda)=\sum_{m=-k(n-1)}^{k(n-1)}h_k(m,n)\cos(m\lambda)\,,$$

$h_k(m, n)$ – полиномиальное окно просмотра данных, для которого

$$\left|H_T(\mu)\right|^\alpha=\left|A_TH^{(T)}(\mu)\right|^\alpha=\frac{1}{B_{\alpha,T}}\left|\frac{\sin\left(\frac{n\mu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mu}{2}\right)}\right|^{2k\alpha}, \tag{4}$$

где $B_{\alpha,T}=(A_T)^{-1}=\int_\Pi\left|\frac{\sin\left(\frac{n\mu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mu}{2}\right)}\right|^{2k\alpha}d\mu$, $k=\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup N$, а нормирующий коэффициент $C(p, \alpha)$ определен аналогично [1]. Обозначим через $\hat{\varphi}(\lambda)=\left[\hat{f}(\lambda)\right]^{\frac{\alpha}{p}}$.

Из [2] следует, что (3) является состоятельной оценкой для функции $\left[\varphi(\lambda)\right]^{\frac{p}{\alpha}}$ в смысле сходимости по вероятности. Исследуем скорость сходимости этой оценки. Введем в рассмотрение числовую последовательность L_T, удовлетворяющую следующим условиям:

$$L_T\in N\,,\ L_T\xrightarrow[T\to\infty]{}\infty\,,\ \frac{M_T}{L_T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0\,,\ \text{но}\ \frac{L_T}{T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0\,.$$

Определение. Будем говорить, что $\varphi(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, удовлетворяет в точке $\lambda_0\in\Pi$ условию Гёльдера с показателем $\gamma\in(0;\,1]$, если для любого λ, достаточно близкого к λ_0, выполняется условие

$$|\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)|\le A(\lambda_0)|\lambda-\lambda_0|^\gamma, \tag{5}$$

где $0<A(\lambda_0)<+\infty$.

Теорема. Пусть спектральная плотность $\varphi(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, процесса $X(t)$, $t\in Z$, ограничена на Π, удовлетворяет условию Гёльдера (5) в точке $\lambda_0\in\Pi$, причем $\varphi(\lambda_0)>0$, а $|H_T(\mu)|^\alpha$ определяется соотношением (4), тогда

$$a_n\{\hat{\varphi}(\lambda_0)-\varphi(\lambda_0)\}\xrightarrow{P}0,$$

где

$$a_n=\begin{cases} n^{\frac{1}{2}\frac{\gamma(2k^2\alpha^2-1)}{2k^2\alpha^2+(2k^2\alpha^2+2k\alpha+1)}}\dfrac{1}{\ln(n)} & при \quad 0<\gamma<1,\\ n^{\frac{1}{2}\frac{2k^2\alpha^2}{3k^2\alpha^2+2k\alpha+1}}\dfrac{1}{\ln^2(n)} & при \quad \gamma=1\end{cases}$$

для $k>\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

Доказательство. Имеем

$M\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|^2=D\hat{f}_T(\lambda_0)+(M\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0))^2$. Как показано в [3],

$$\left|M\hat{f}_T(\lambda_0)-\left[\varphi(\lambda_0)\right]^{\frac{p}{\alpha}}\right|=\begin{cases} O\left(\dfrac{1}{M_T^{\gamma}}\right), & если \quad 0<\gamma<1,\ k>\dfrac{1+\gamma}{2\alpha},\\ O\left(\dfrac{\ln M_T}{M_T}\right), & если \quad \gamma=1,\ k>\dfrac{1}{\alpha}.\end{cases} \tag{6}$$

В дальнейшем запись $x_T \underset{T\to\infty}{\equiv} y_T$ будет означать, что $x_T-y_T\to 0$ при $T\to\infty$.

Из [1] следует, что

$$D\hat{f}_T(\lambda_0)\underset{T\to\infty}{=}\frac{2\pi}{L_T}\int_{\Pi}W_T^2(\upsilon)V(p,\alpha)\left[\psi_T(\lambda_0+\upsilon)\right]^{\frac{2p}{\alpha}}d\upsilon+$$

$$+\max_{\substack{s,r=-\left[\frac{L_T}{2}\right]\\ s\neq r}}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]}\operatorname{cov}\{I_T(\lambda_0+\upsilon_s);I_T(\lambda_0+\upsilon_r)\}\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2\left(\sum_{\substack{s=-\left[\frac{L_T}{2}\right]\\ s\neq r}}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]}\sum_{r=-\left[\frac{L_T}{2}\right]}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]}W_T(\upsilon_s)W_T(\upsilon_r)\right),$$

где $V(p,\alpha)=\dfrac{C(p,\alpha)}{C(2p,\alpha)}-1$, $\nu_s=-\pi+\dfrac{2\pi}{L_T}s$, $\nu_r=-\pi+\dfrac{2\pi}{L_T}r$,

$\psi_T(\lambda)=\int_{\Pi}\left|H_T(\upsilon)\right|^{\alpha}\varphi(\lambda+\upsilon)d\upsilon$. Поскольку $V(p,\alpha)\left[\psi_T(\lambda_0+\upsilon)\right]^{\frac{2p}{\alpha}}<+\infty$ и

$\dfrac{2\pi}{L_T}\int_{\Pi}W_T^2(\upsilon)d\upsilon\underset{T\to\infty}{\simeq}\dfrac{M_T}{L_T}\int_{-\infty}^{\infty}k_T^2(x)dx$, то

$$\frac{2\pi}{L_T}\int_{\Pi}W_T^2(\upsilon)V(p,\alpha)\left[\psi_T(\lambda_0+\upsilon)\right]^{\frac{2p}{\alpha}}d\upsilon=O\left(\frac{M_T}{L_T}\right)=O\left(n^{-(\beta-q)}\right). \tag{7}$$

Рассмотрим

$$\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2\left(\sum_{\substack{s=-\left[\frac{L_T}{2}\right]\\ s\neq r}}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]}\sum_{r=-\left[\frac{L_T}{2}\right]}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]}W_T(\upsilon_s)W_T(\upsilon_r)\right)\le\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2\left(\sum_{s=-\left[\frac{L_T}{2}\right]}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]}\sum_{r=-\left[\frac{L_T}{2}\right]}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]}W_T(\upsilon_s)W_T(\upsilon_r)\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{L_T}\sum_{s=-\left[\frac{L_T}{2}\right]}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(\nu_s)\frac{2\pi}{L_T}\sum_{r=-\left[\frac{L_T}{2}\right]}^{\left[\frac{L_T}{2}\right]} W_T(\nu_r)\underset{T\to\infty}{\cong}\left(\int_{\Pi} W_T(\nu)d\nu\right)^2=1.$$

Пусть $M_T=n^{-q}$, $L_T=n^{-\beta}$. Из [1] известно, что

$$\operatorname*{cov}_{\substack{\upsilon_s,\upsilon_r=1,L_T\\ s\neq r}}\{I_T(\lambda_0+\upsilon_s);I_T(\lambda_0+\upsilon_r)\}=O\left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha}\right)}\right) \tag{8}$$

при $\beta<1-\frac{1}{2k^2\alpha^2}$, $\beta>q$. С учетом (7) и (8) получаем

$$D\hat{f}_T(\lambda_0)=O\left(n^{-(\beta-q)}\right)+O\left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha}\right)}\right). \tag{9}$$

Если $\gamma\in(0;1)$, тогда с учетом (6) и (9) имеем

$$M\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|^2=O\left(n^{-2q\gamma}\right)+O\left(n^{-(\beta-q)}\right)+O\left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha}\right)}\right).$$

Потребуем, чтобы все слагаемые в правой части последнего выражения стремились к нулю с одинаковой скоростью. Тогда

$$\begin{cases}2q\gamma=\beta-q,\\ \beta-q=\dfrac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha},\end{cases}$$

откуда $\beta=\dfrac{(1+2\gamma)\left(2k^2\alpha^2-1\right)}{\left(2\gamma(1+2k\alpha)+2k^2\alpha^2(1+2\gamma)\right)}$ и $\beta-q=\dfrac{\gamma\left(2k^2\alpha^2-1\right)}{\gamma(1+2k\alpha)+k^2\alpha^2(1+2\gamma)}$.

Следовательно, $M\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|^2=O\left(n^{-\frac{\gamma\left(2k^2\alpha^2-1\right)}{\gamma(1+2k\alpha)+k^2\alpha^2(1+2\gamma)}}\right)$, $2k^2\alpha^2>1$.

Если $\gamma=1$, то с учетом (6) и (9) имеем

$$M\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|^2=O\left(n^{-2q}\ln^2(n)\right)+O\left(n^{-(\beta-q)}\right)+O\left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha}\right)}\right)=$$

$$=O\left(n^{-2q}\ln^2(n)\right)+O\left(n^{-(\beta-q)}\ln^2(n)\right)+O\left(n^{-\left(\frac{2k^2\alpha^2(1-\beta)-1}{1+2k\alpha}\right)}\ln^2(n)\right).$$

Проведя аналогичные рассуждения, получаем

$$M\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|^2=O\left(n^{-\frac{2k^2\alpha^2-1}{3k^2\alpha^2+2k\alpha+1}}\ln^2(n)\right).$$

Применив неравенство $|x^q-y^q|\le\frac{q}{2}|x-y|(x^{q-1}+y^{q-1})$ при $q=\frac{\alpha}{p}$, $x, y>0$, имеем

$$\left|\hat{\varphi}(\lambda_0)-\varphi(\lambda_0)\right|\le\frac{\alpha}{2p}\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|\left(\hat{f}_T^{\frac{\alpha}{p}-1}(\lambda_0)+f^{\frac{\alpha}{p}-1}(\lambda_0)\right), \tag{10}$$

где $\hat{f}_T^{\frac{\alpha}{2}-1}(\lambda_0)+f^{\frac{\alpha}{2}-1}(\lambda_0)\xrightarrow{P}2f^{\frac{\alpha}{2}-1}(\lambda_0)$.

С учетом (10) для заданного $\varepsilon>0$ получаем

$$P\left(a_n\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|>\varepsilon\right)\le\frac{a_n^2}{\varepsilon^2}M\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|^2\le\frac{\text{const}}{\varepsilon^2}\frac{1}{\ln^2 n}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

1. Демеш Н.Н. // Применение полиномиальных ядер к оцениванию спектров дискретных устойчивых стационарных процессов. Препринт / АН УССР. Ин-т математики. № 88.64. Киев, 1988. С. 31.

2. Demesh N.N., Chekhmenok S.L. // Proceedings of the Six International Conference, Minsk, September 10–14, 2001. Minsk, 2001. P. 123.

3. Демеш Н.Н., Чехменок С.Л. // Статистический анализ данных и моделирование: Сб. тр. междунар. науч. конф. Мн., 2002. С. 35.

Поступила в редакцию 12.02.2003.

Николай Николаевич Демеш – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ИПМОАП.

Сергей Леонидович Чехменок – аспирант кафедры ИПМОАП. Научный руководитель – Н.Н. Демеш.

УДК 517.518.14, 517.927.21

С.А. МАРЗАН

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

A system of nonlinear equations of fractional order containing the Riemann – Liouville fractional derivative, is considered on a finite interval of the real axis in a weighted space of continuous functions. The equivalence of the Cauchy-type problem for such a system and of a system of nonlinear Volterra integral equations is established, and the existence and uniqueness of its solution is proved. The corresponding assertions for a system of ordinary differential equations are presented.

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ – дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha\in C$ ($\mathrm{Re}(\alpha)>0$) на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha}g)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad \alpha\in C,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0, \tag{1}$$

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}},\quad n=[\mathrm{Re}(\alpha)]+1, \tag{2}$$

где $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$ [1, § 2.2, 2.4].

Рассмотрим задачу типа Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка

$$\left(D_{a+}^{\alpha_i}y_i\right)(x)=f_i[x, y_1(x), \ldots, y_m(x)]\ (i=1, \ldots, m;\ n_i-1<\mathrm{Re}(\alpha_i)<n_i,\ n_i=-[-\mathrm{Re}(\alpha_i)]) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$(D_{a+}^{\alpha_i-j_i}y_i)(a+)=b_{j_i}\in C\quad (i=1, \ldots, m;\ j_i=1, \ldots, n_i). \tag{4}$$

При $m=1$ задача (3) – (4) рассматривалась многими авторами (см. [1, § 42], [2]). Теоремы существования и единственности решения такой задачи в классе абсолютно интегрируемых функций $L(a, b)$ доказаны в [3], а в весовом классе непрерывных функций