Краткие сообщения

УДК 517.925.51

Н.Г. БУЛГАКОВ

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ НЕАСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

In the terms of constant signs Liapunov's functions for a particular case the necessary and s ficient conditions of nonasymptotic stability of a trivial solution of an autonomous differen equations are established. The example is reviewed.

Достаточные условия неасимптотической устойчивости в терминах зн копостоянных функций Ляпунова были установлены автором данной стат в [1]. Позднее они были уточнены в [2] (снято лишнее условие). В [Б.С. Калитиным предложен вариант аналогичной теоремы для случая, ког функция Ляпунова не обладает свойством непрерывности. Дальнейшее ра витие результатов в этом направлении связано с работами [4, 5].

Свойство неасимптотической устойчивости настолько слабое, что р шить задачу, сформулированную в заголовке, для общего случая вряд возможно в ближайшее время. Поэтому представляет интерес исследован практически важных случаев, когда такая задача может быть решена.

Исследуем один из них. Итак, рассмотрим систему

$$x' = f(x), \; f(0) = 0,$$

где $f \in C(\mathbf{R}^n)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \le r, \; r>$ есть замкнутый шар; $V: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – функция Ляпунова; $m = \{x \in \mathbf{R}^n : V(x) = 0\}$ – мн жество нулей функции V; $\mathrm{Fr}\, m$ – граница m, $\mathrm{int}\, m$ – внутренность $x^-(t, x_0)$, $x^\infty(t, x_0)$ – ненулевые решения ($x_0 \ne 0$), определенные на $\mathbf{R}^-$, $\mathbf{R}$; $A(x_0)$ множество всех α-предельных точек для $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Множество m называет телесным, если для любой точки $a \in \mathrm{int}\; m$ существует $r>0$ такое, что ш $B(a, r)$ радиуса r с центром в точке a принадлежит $\mathrm{int}\, m$. Всюду в дальне шем будем предполагать, что для системы $\exists V: V \ge 0, \;\; \dot V \le 0, \; x \in B_r$, при этом телесно и $\{0\} \in \mathrm{Fr}\; m$. Далее будут использоваться определения относител ной устойчивости и относительной асимптотической устойчивости из [3].

Важную роль в решении поставленной задачи сыграла

Теорема 1 ([6, теорема 1]; [7, теорема 21.2]). Если нуль системы усто чив относительно m и асимптотически устойчив относительно $\mathrm{Fr}\, m$, то устойчив.

Выскажем сначала ряд предварительных замечаний.

Лемма 1. Если нуль системы неустойчив относительно $\mathbf{R}^n\backslash m$, но устойчив относительно m, то при любом достаточно малом $\sigma>0$ множество $\mathrm{Fr}\, m \bigcap B_\sigma$ содержит отрицательную полутраекторию.

Доказательство. Нуль $\mathbf{R}^n\backslash m$-неустойчив. Следовательно, $\forall\varepsilon<r\ \exists\{y_n\}$, $y_n \in \mathbf{R}^n\backslash m$, $y_n\to 0$, $n\to 0$, такая, что $\forall\sigma\le\varepsilon\ \exists\{t_n\}$, $t_n\to\infty$, $n\to\infty$: $\|x(t,\ y_n)\|<\sigma$, $0\le t<t_n$; $\|x_n\|=\|x(t_n,\ y_n)\|=\sigma$, при этом $x_n\to x^*$, $n\to\infty$, $\|x^*\|=\sigma$. Можно доказать, что $x^-(t,\ x^*)\subset m\cap B_\sigma$ ([7, лемма 21.1]). Покажем, что $x^*\in \mathrm{Fr}\ m$. Предположим от противного, что $x^*\in \mathrm{int}\, m$. Так как m телесно и $x_n\to x^*$, то $\exists N>0{:}x_n\in \mathrm{int}\, m$, $n>N$. Рассуждая далее, как в [6], приходим к противоречию. Затем, повторив соответствующие рассуждения из [6], получаем $x^-(t, x^*)\subset \mathrm{Fr}\ m\cap B_\sigma$.

Лемма 2. Если: 1) нуль системы m-устойчив, 2) $\exists\sigma>0$, что множество $\mathrm{Fr}\, m\cap B_\sigma$ не содержит отрицательных полутраекторий $x^-(t,\ x_0)$, то нуль устойчив.

Доказательство. Предположим от противного, что нуль неустойчив. Тогда будут выполнены все условия леммы 1, что несовместимо с условием 2).

Лемма 3. Условия 1), 2), фигурирующие в лемме 2, эквивалентны условиям: а) нуль m-устойчив, б) $\exists\varepsilon>0$, что множество $\mathrm{Fr}\, m\cap B_\varepsilon$ не содержит целых траекторий $x^\infty(t,\ x_0)$.

Доказательство. Предположим от противного, что $\forall\sigma<\varepsilon\ \exists x_0\neq 0$: $x^-(t,\ x_0)\subset \mathrm{Fr}\ m\cap B_\sigma$. Тогда $A(x_0)\neq\varnothing$. Пусть $x^*\in A(x_0)$. Случай, когда $x^*=0$ является единственной точкой $A(x_0)$, несовместим с условием а). Пусть $x^*\neq 0$. Поскольку все точки целой траектории $x^\infty(t,\ x^*)$ являются α-предельными для $x^-(t,\ x_0)$ и множество $\mathrm{Fr}\ m\cap B_\sigma$ замкнутое, то $x^\infty(t,\ x^*)\subset \mathrm{Fr}\ m\cap B_\sigma\subset \mathrm{Fr}\ m\cap B_\varepsilon$. А это противоречит условию б).

Сформулируем основной результат, который является перефразировкой леммы 3.

Критерий устойчивости. *Пусть для системы существует* $V{:}V\ge 0$, $\dot V\le 0$, $x\in B_r$, *при этом* $\{0\}\in \mathrm{Fr}\ m$, *множество* m *телесно и граница этого множества (в достаточно малом шаре* B_ε*) не содержит целых траекторий* $x^\infty(t,\ x_0)$. *Нуль системы устойчив тогда и только тогда, когда он устойчив относительно множества нулей функции* V.

Проиллюстрируем использование критерия устойчивости на примере. Рассмотрим систему

$$\dot x = \varphi(y),\ \ \dot y = -y + \psi(x),$$

где $\varphi(y)\equiv 0$, $y\in[-1,\ 1]$; $\varphi(y)y>0$, $y\notin[-1,\ 1]$; $\psi(x)\equiv 0$, $x\in[0,\ 1]$; $\psi(x)x<0$, $x\notin[0,\ 1]$.

Возьмем функцию $V=-\int\limits_0^x\psi(x)dx+\int\limits_0^y\varphi(y)dy\ge 0$, $\dot V=-y\varphi(y)\ \le 0$; $m=\{(x,\ y){:}\ x\in[0,\ 1],\ y\in[-1,\ 1]\}$. На множестве m система имеет вид $\dot x=0$, $\dot y=-y$. Имеем: множество m телесно, $\{0\}\in \mathrm{Fr}\ m$; $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$ – точки покоя, расположенные на $\mathrm{Fr}\, m$; $\exists\sigma>0$ такое, что множество $\mathrm{Fr}\ m\cap B_\sigma$ не содержит целых траекторий $x^\infty(t,\ x_0)$. Поскольку нуль m-устойчив, то он устойчив.

Замечания. 1. Если в лемме 2 заменить условия 1), 2) более жестким требованием: а) нуль m-устойчив, б) нуль асимптотически устойчив относительно $\mathrm{Fr}\ m$, то придем к теореме 1.

2. Критерий устойчивости удобен для исследования квазилинейных систем с разрывными характеристиками в критических случаях (см. пример).

Автор благодарит Б.С. Калитина и Ю.Б. Сыроида за внимание к работе.

1. Булгаков Н.Г. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 9. С. 788.
2. Гайшун И.В., Княжище Л.Б. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № С. 1453.
3. Kalitin B.S. // R. A. I. R. O. Automatique/Systems Analysis and Control. 1982. Vol. 1 № 3. P. 275.
4. Калитин Б.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1984. № 3. С. 61.
5. Калитин Б.С. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 5. С. 758.
6. Грудо Э.И. // Там же. 1983. Т. 19. № 5. С. 782.
7. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнени Мн., 1983.

Поступила в редакцию 31.01.2003.

Николай Григорьевич Булгаков – кандидат физико-математических наук, доцент.

УДК 519.283+681.142

Д.В. СЕНЬКО

МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ПАМЯТЬЮ

The paper presents a model of a stochastic process with dependency on previous states in for of a stochastic difference equation. This model complements the Brownian motion model to d scribe the dynamics of financial assets prices. The type of dependence on previous states is derive from widely used financial time series analysis techniques that are applied to build up tradir strategies.

Presented estimation algorithms for model parameters are based on maximum likelihoc method. The analysis of model adequacy is conducted for real financial time series. The model d termination and risk of one step forecasts are estimated.

В исследовании свойств случайных процессов важную роль играют сто хастические дифференциальные уравнения, в аналитическом виде решени некоторых из них можно найти в [1, 2]. Попытка уточнения модели с целы большего соответствия реальному явлению часто приводит к невозможно сти найти решение в явной форме. Таким уточнением служит предположе ние зависимости состояния процесса от его состояний в предыдущие мо менты времени. В качестве математического аппарата в таких случаях вы ступает имитационное моделирование [3]. Метод максимального правдопо добия – один из способов оценки параметров модели.

Модель процесса с памятью

Широко используемая в финансовых и страховых расчетах модель ра: вития цен, или логарифмов цен актива, а также ее модификации с меняю щимися во времени коэффициентами сноса и диффузии предполагают не зависимость приращений [4]:

$$dy(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \qquad (1$$

где $y(t)$ – цена актива, $W(t)$ – стандартный Броуновский процесс, μ, σ – ко эффициенты сноса и диффузии.

Эмпирические исследования отмечают ряд несоответствий между свой ствами случайных процессов, описанных моделью (1), и реальных финан совых временных рядов [5]. Причины этого можно проследить на следую щей дискретной модели. Приращение цены актива за один период опреде ляется совокупным спросом и предложением на данный актив в рассматри ваемый период:

$$y_{t+1} - y_t = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i^t, \qquad (2$$