Следствие 1. Коэффициент робастности (6) имеет вид:

$$\kappa(T, \tau) = \psi'(u_{T+\tau})A^{-1}\psi(u_{T+\tau}) + \tilde{\varepsilon}'\chi \ / \ (\mathrm{tr}\ \Sigma).$$

Следствие 2. В случае «кусочных искажений» (2) $r_+(T, \tau) = r_0(T, \tau) + \tilde{\varepsilon}'\overline{\chi}$, где $\overline{\chi} = ((\sum_{t: u_t \in U_1} \left|(\theta^0\ \psi(u_t))_k\right| |\alpha_t| + |(\theta^0\psi(u_{T+\tau}))_k|\, I_{U_1}(u_{T+\tau}))^2) \in \mathbb{R}^N$, $k = 1, \ldots, N$.

В заключение отметим, что результаты, полученные в [3], являются частным случаем (при $N = 1$) результатов, полученных в данной статье.

1. Четыркин Е. Статистическое прогнозирование. М., 1977.
2. Перельман И.И. // Автоматика и телемеханика. М., 1994. № 3.
3. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль М. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М., 1989.
4. Хьюбер П. Робастность в статистике. М., 1984.
5. Харин Ю.С., Маевский В.В. // Автоматика и телемеханика. М., 2002. № 11. С. 118.
6. Сталевская С.Н. // Актуальные проблемы информатики: Сб. тр. 6-й Междунар. конф.: В 2 ч. Мн., 1998. Ч. 2. С. 365.
7. Kharin Yu.S. Robustness in statistical pattern recognition. Dordrecht, 1996.
8. Харин Ю.С. // Автоматика и телемеханика. М., 1982. № 11. С. 155.

Поступила в редакцию 27.06.2003.

Владислав Владимирович Маевский – аспирант кафедры математического моделирования и анализа данных. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных Ю.С. Харин.

УДК 519.872

М.А. МАТАЛЫЦКИЙ, А.В. ПАНЬКОВ

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ДОХОДОВ В БАНКОВСКИХ СЕТЯХ

Investigation of the probabilistic model of the incomes change in the banking networks is presented. The closed Markov queueing network with incomes serves as model. The sets of difference-differential equations are composed for the incomes of the network systems. These sets are solved by the operating method.

Современная банковская сеть – важная сфера национального хозяйства любого государства. Действующая в нашей стране платежная система может быть кратко охарактеризована следующим образом. На верхнем уровне банковской сети находится Национальный банк (Центральный банк), ниже – коммерческие банки с их филиалами. Национальный банк регулирует денежное обращение, обладает исключительным правом эмиссии денег и осуществляет иную деятельность по регулированию кредитно-денежных отношений в государстве. Осуществление безналичных операций между субъектами хозяйствования порождает взаимные расчеты между банками, которые возникают тогда, когда плательщик и получатель обслуживаются разными банками, а также при различном кредитовании банков и перемещении наличных денег. Все межбанковские переводы средств внутри страны осуществляются единым расчетным комплексом, включающим коммуникационную инфраструктуру, средства безопасности и обработки данных, которые эксплуатируются государственным предприятием «Межбанковский расчетный центр» (ГП «МРЦ») Национального банка – оператора электронной платежной системы. По правилам, утвержденным Национальным банком, под контролем этого центра производятся электронные межбанковские расчеты по платежным транзакциям банков и их клиентов через корреспондентские счета, открывающиеся на балансе каждого банка.

Межбанковские расчеты осуществляются с помощью банковских компьютерных сетей, с использованием которых банки повышают свои доходы. Для уменьшения затрат и увеличения производительности таких сетей разработчики все чаще обращаются к математическим моделям, в частности к моделям теории сетей массового обслуживания (МО), особенности применения которых требуют учета различных видов взаимодействия их отдельных систем МО (СМО). СМО взаимодействуют между собой путем поэтапного обслуживания заявок, изменения его сроков на различных этапах и т. д. Подобные явления наблюдаются и в банковских сетях с различным числом филиалов и расчетных центров. Теория сетей МО, таким образом, представляет собой удобный язык для описания функционирования банковских сетей, представляющих довольно сложную для формализации модель. Важной задачей является анализ таких сетей в переходном режиме, позволяющий находить зависящие от времени характеристики различных объектов, моделями которых они являются.

Цель настоящей работы – применение марковской сети МО с доходами для нахождения ожидаемого дохода от переходов между состояниями банковской сети, соответствующих поступлению запросов (заявок) из коммерческих банков в Центральный банк и получению ответов на эти запросы. Заявками могут служить транзакции о переводе денег в другой банк.

Анализ доходов Центрального банка

Пусть у каждого коммерческого банка имеется один корреспондентский счет в Центральном банке. Под доходом банковской сети будем понимать общую сумму денег, находящуюся на счетах банков и на корреспондентских счетах Центрального банка, который получает доходы при переводе денег с помощью банковской компьютерной сети из коммерческих банков и несет убытки при переводе денег в эти банки.

Изменение доходов в таком случае можно описать с помощью замкнутой экспоненциальной сети МО, состоящей из периферийных СМО $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ (коммерческие банки) и центральной системы S_n (Центральный банк), все СМО – однолинейные (рис. 1).

Состояние сети описывается вектором $k(t)=(k, t)=(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n, t)$, где k_i – число заявок в системе S_i, $i=\overline{1, n}$. Под заявкой в данном случае понимается транзакция по переводу денег из коммерческого или Центрального банка. Пусть μ_i – интенсивность обслуживания заявок в системе S_i, $i=\overline{1, n}$, p_{ni} – вероятность поступления заявок из системы S_n в систему S_i, $i=\overline{1, n-1}$, $\sum_{i=1}^{n-1} p_{ni}=1$.

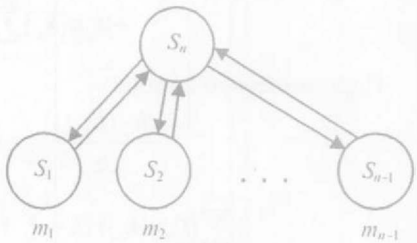

Рис. 1

Обозначим через $v_n(k, t)$ полный ожидаемый доход, который получает система S_n за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k (ожидаемый доход Центрального банка за время t). Предположим, что система S_n получает доход в размере $r_n(k)$ у. е. за единицу времени в течение всего периода пребывания сети в состоянии k. Когда сеть совершает переход из состояния k в состояние $(k-I_i+I_n)$, она приносит системе S_n доход в размере $r(k-I_i+I_n)$, а когда совершает переход из состояния k в состояние $(k+I_i-I_n)$, – доход в размере $(-R(k+I_i-I_n))$, где I_i – вектор размерности

n, состоящий из нулей, за исключением i-й компоненты, которая равна 1 Заметим, что $r_n(k)$, $r(k)$ и $R(k)$ имеют различные размерности. В течение ин тервала времени Δt сеть может остаться в состоянии k либо совершить пе реход в состояние $(k–I_i+I_n)$ или $(k+I_i–I_n)$. Если она остается в состоянии k, т доход системы S_n составит $r_n(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_n(k, t)$ за остав шиеся t единиц времени. Вероятность такого события равн $1-\sum_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)\Delta t$, где $u(k_i)=\begin{cases}1, & k_i>0\\ 0, & k_i=0\end{cases}$. Если же за время Δt сеть совершае переход в состояние $(k–I_i+I_n)$ с вероятностью $\mu_i u(k_i)\Delta t$, то доход системы S составит $r(k–I_i+I_n)$ плюс ожидаемый доход $v_n(k–I_i+I_n, t)$, который будет по лучен за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети был $(k–I_i+I_n)$. Если же за время Δt сеть совершает переход в состояние $(k+I_i–I_n)$ вероятностью $\mu_n p_{ni} u(k_n)\Delta t$, то доход составит $R(k+I_i–I_n)$ плюс ожидаемы доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием был $(k+I_i–I_n)$, $i=\overline{1,\ n-1}$. Тогда, используя формулу полной вероятности, полу чаем систему разностных уравнений для дохода $v_n(k, t)$:

$$v_n(k,\ t+\Delta t)=\left(1-\sum_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)\Delta t\right)\left[r_n(k)\Delta t+v_n(k,\ t)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i u(k_i)\Delta t\left[r(k-I_i+I_n)+v_n(k-I_i+I_n,\ t)\right]+$$

$$+\mu_n u(k_n)\Delta t\sum_{i=1}^{n-1}p_{ni}\left[-R(k+I_i-I_n)+v_n(k+I_i-I_n,\ t)\right],$$

из которой следует система разностно-дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_n(k,\ t)}{dt}=r_n(k)-\sum_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)v_n(k,\ t)+\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i u(k_i)r(k-I_i+I_n)-$$

$$-\mu_n u(k_n)\sum_{i=1}^{n-1}p_{ni}R(k+I_i-I_n)+\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i u(k_i)v_n(k-I_i+I_n,\ t)+$$

$$+\mu_n u(k_n)\sum_{i=1}^{n-1}p_{ni}v_n(k+I_i-I_n,\ t).$$

Перепишем ее в виде:

$$\frac{dv_n(k,\ t)}{dt}=r_n(k)-\sum_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)v_n(k,\ t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\mu_i u(k_i)r(k-I_i+I_n)-\mu_n u(k_n)p_{ni}R(k+I_i-I_n)\right]+ \quad (1$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\mu_i u(k_i)v_n(k-I_i+I_n,\ t)+\mu_n u(k_n)p_{ni}v_n(k+I_i-I_n,\ t)\right].$$

В частном случае, если $r_n(k)$, $r(k)$, $R(k)$ не зависят от состояний сети и равны соответственно r_n, r, R, имеем:

$$\frac{dv_n(k,\ t)}{dt}=r_n-\mu_n u(k_n)R+r\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i u(k_i)-\sum_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)v_n(k,\ t)\ +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\mu_i u(k_i)v_n(k-I_i+I_n,\ t)+\mu_n u(k_n)p_{ni}v_n(k+I_i-I_n,\ t)\right]. \quad (2$$

Анализ доходов периферийных банков и сети в целом

Рассмотрим теперь доходы, которые получают периферийные системы S_i, $i=\overline{1,\ n-1}$. Обозначим через $v_i(k,\ t)$ полный ожидаемый доход, который получает периферийная система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k. Теперь, когда сеть совершает переход из состояния k в состояние $(k–I_i+I_n)$, она приносит доход системе S_i в размере $(–r(k–I_i+I_n))$, а когда переходит из состояния k в состояние $(k+I_i–I_n)$, – доход в размере $R(k+I_i–I_n)$. Предположим также, что сеть системе S_i приносит доход в размере $r_i(k)$ у. е. за единицу времени в течение всего периода пребывания ее в состоянии k, $i=\overline{1,\ n-1}$. Тогда будем иметь:

$$v_i(k,\ t+\Delta t)=\left(1-\sum_{j=1}^{n}\mu_j u(k_j)\Delta t\right)\left[r_i(k)\Delta t+v_i(k,\ t)\right]+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}\mu_j u(k_j)\Delta t v_i(k-I_j+I_n,\ t)+\mu_n u(k_n)\Delta t\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}p_{nj}v_i(k+I_j-I_n,\ t)=$$

$$=\left(1-\sum_{j=1}^{n}\mu_j u(k_j)\Delta t\right)\left[r_i(k)\Delta t+v_i(k,\ t)\right]-\mu_i u(k_i)r(k-I_i+I_n)\Delta t+$$

$$+\mu_n u(k_n)p_{ni}R(k+I_i-I_n)\Delta t+\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j u(k_j)\Delta t v_i(k-I_j+I_n,\ t)+$$

$$+\mu_n u(k_n)\Delta t\sum_{j=1}^{n-1}p_{nj}v_i(k+I_j-I_n,\ t),$$

откуда следует, что

$$\frac{dv_i(k,\ t)}{dt}=r_i(k)-\sum_{j=1}^{n}\mu_j u(k_j)v_i(k,\ t)+$$

$$+\left[\mu_n u(k_n)p_{ni}R(k+I_i-I_n)-\mu_i u(k_i)r(k-I_i+I_n)\right]+ \tag{3}$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\mu_j u(k_j)v_i(k-I_j+I_n,\ t)+\mu_n u(k_n)p_{nj}v_i(k+I_j-I_n,\ t)\right],\quad i=\overline{1,\ n-1}.$$

Если $r_i(k)$, $r(k)$, $R(k)$ не зависят от состояний сети, то

$$\frac{dv_i(k,\ t)}{dt}=r_i+\left[\mu_n u(k_n)p_{ni}R-\mu_i u(k_i)r\right]-\sum_{j=1}^{n}\mu_j u(k_j)v_i(k,\ t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\mu_j u(k_j)v_i(k-I_j+I_n,\ t)+\mu_n u(k_n)p_{nj}v_i(k+I_j-I_n,\ t)\right],\quad i=\overline{1,\ n-1}. \tag{4}$$

Из (3) следует, что суммарный доход $\sum_{i=1}^{n-1}v_i(k,\ t)=v(k,\ t)$ для периферийных СМО удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{dv(k,\ t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n-1}r_i(k)-\sum_{j=1}^{n}\mu_j u(k_j)v(k,\ t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\mu_n u(k_n)p_{ni}R(k+I_i-I_n)-\mu_i u(k_i)r(k-I_i+I_n)\right]+ \tag{5}$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\mu_j u(k_j)v(k-I_j+I_n,\ t)+\mu_n u(k_n)p_{nj}v(k+I_j-I_n,\ t)\right],$$

а суммарный доход всех систем сети $\Theta(k,\ t) = v(k,\ t) + v_n(k,\ t)$, как следуе
из (1), (5), системе

$$\frac{d\Theta(k,\ t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} r_i(k) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i u(k_i)\Theta(k,\ t) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} [\mu_i u(k_i)\Theta(k - I_i + I_n,\ t) + \mu_n u(k_n) p_{ni}\Theta(k + I_i - I_n,\ t)]. \quad (6$$

Заметим, что общий доход сети $\Theta(k, t)$ не зависит от $r(t)$, $R(k)$. Этого следовало ожидать, поскольку, согласно закону сохранения денежной массы замкнутой сети (если центральная СМО получает доход, то периферийны СМО несут убытки, и наоборот), ее сумма возрастает только за счет рост процентов от денежной массы, хранящейся в системах сети, на величин $\sum_{i=1}^{n} r_i(k)$.

Переобозначим состояния сети последовательно 1, 2, …, l. Заметим, чт системы уравнений (2), (4), (6) можно представить в матричном виде:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = Q_i + AV_i(t),$$

где $V_i^T(t)=(v_i(1, t), \ldots, v_i(l, t))$ – вектор доходов системы S_i в момент времен t в зависимости от начального состояния сети, $i = \overline{1,\ n}$, $V_{n+1}^T(t)=$ $=(\Theta(1, t), \ldots, \Theta(l, t))$ – вектор доходов сети в целом. Для решения таких систем уравнений можно применить операционный метод, задав вектор начальных условий $V_i(0)$. Пусть $U_i(s)$ – вектор преобразований Лапласа доход дов $v_i(j, t)$, $i = \overline{1,\ l}$. Тогда $sU_i(s)–V_i(0)=\frac{1}{s}Q+AU_i(s)$ или $(sI–A)U_i(s)=\frac{1}{s}Q+V_i(0)$ где I – единичная матрица. Отсюда находим $U_i(s)$:

$$U_i(s) = \frac{1}{s}(sI - A)^{-1}Q_i + (sI - A)^{-1}V_i(0). \quad (7$$

Вектор доходов $V_i(t)$ может быть найден при помощи обратного преобразования для (7). Если $W(t)$, $H(t)$ – обратные преобразования Лапласа матриц $\frac{1}{s}(sI - A)^{-1}$ и $(sI - A)^{-1}$ соответственно, то обратное преобразовани переводит соотношение (7) в (8):

$$V_i(t) = W(t)Q_i + H(t)V_i(0),\ i = \overline{1,\ n+1}. \quad (8$$

Таким образом можно получить соотношения для оценки доходов Центрального и периферийных банков, а также банковской сети в целом в любой момент времени t.

Значения доходов в зависимости от состояний сети

Состояния сети	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$r_1(k)$	10	12	11	13	15	12	18	16	17	14	19	20	14	15	11
$r_2(k)$	18	11	12	15	12	13	14	19	20	17	16	13	15	12	13
$r_3(k)$	20	20	22	25	30	31	28	26	33	35	27	23	29	24	34
$r(k)$	1	3	2	4	5	7	6	8	9	10	7	6	5	3	4
$R(k)$	2	3	1	5	4	6	8	9	7	6	5	4	3	2	1

Пример. Рассмотрим сеть со следующими параметрами: $n=3$, $K=4$, $\mu_1=3$, $\mu_2=2$, $\mu_3=1$, $p_{n1}=0{,}5$, $p_{n2}=0{,}5$, которая является моделью банковской сети, состоящей из Центрального банка и двух периферийных. Вектор состояний сети имеет вид $(k, t)=(k_1, k_2, K-k_1-k_2)$. Состояниями такой сети будут (0, 0, 4), (0, 1, 3), (0 ,2, 2), (0, 3, 1), (0, 4, 0), (1, 0, 3), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 3, 0), (2, 0, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 1), (3, 1, 0), (4, 0, 0), которые переобозначим соответственно 1, …, 15. Доходы $r_i(k)$, $i=\overline{1,\ 3}$, $r(k)$, $R(k)$ представлены в таблице. Пусть $V_i^T(0)=(43, 20, 43, 48, 30, 14, 33, 24, 39, 41, 26, 20, 31, 36, 28)$, $i=\overline{1,\ 4}$. На рис. 2, 3 представлено изменение доходов Центрального банка $v_3(15,\ t)$, первого $v_1(15,\ t)$ и второго $v_2(15,\ t)$ периферийных банков в зависимости от времени.

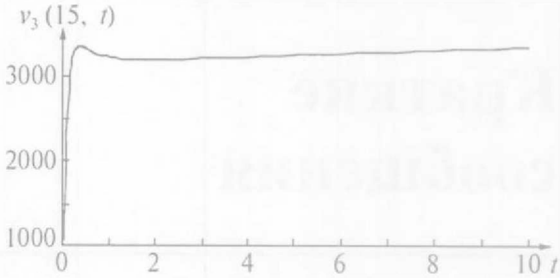

Рис. 2. Временная зависимость дохода Центрального банка

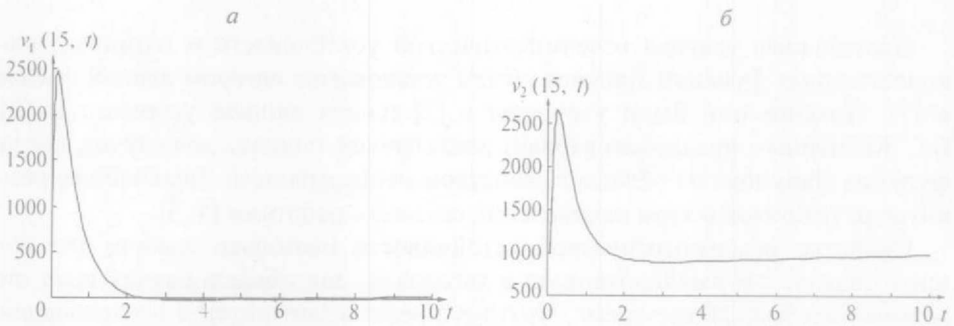

Рис. 3. Временная зависимость дохода первого (*а*) и второго (*б*) периферийных банков

Замечание. Расчеты различных примеров показали, что нахождение решений систем уравнений типа (1), (5), (7) операционным методом можно успешно провести, если сети МО имеют относительно небольшое число состояний. Это связано, в частности, с вычислением обратных матриц $(sI-A)^{-1}$, разложением их и нахождением обратного преобразования Лапласа с помощью пакета Mathematica, поэтому данный метод целесообразно применять для исследования моделей банковских сетей с небольшим числом периферийных банков.

Поступила в редакцию 27.06.2003.

Михаил Алексеевич Маталыцкий – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций, функционального анализа, вероятностей и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Я. Купалы.

Андрей Витальевич Паньков – аспирант кафедры теории функций, функционального анализа, вероятностей и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Я. Купалы. Научный руководитель – М.А. Маталыцкий.