Приведем результаты применения преобразования Лапласа к некоторы слагаемым уравнения (7) с учетом условий (4″):

$$\int_0^{+\infty} lU(q,\ g,\ l)e^{-ml}dl = -\left[\int_0^{+\infty} U(q,\ g,\ l)e^{-ml}dl\right]_m = -V_m(q,\ g,\ m),$$

$$\int_0^{+\infty} U_l(q,\ g,\ l)e^{-ml}dl = mV(q,\ g,\ m) - U(q,\ g,\ l=+0) = mV(q,\ g,\ m),$$

$$\int_0^{+\infty} lU_l(q,\ g,\ l)e^{-ml}dl = -\left[\int_0^{+\infty} U_l(q,\ g,\ l)e^{-ml}dl\right]_m = -(mV(q,\ g,\ m))_m,$$

$$\int_0^{+\infty} (U_g(q,\ g,\ l))_{ll}e^{-ml}dl = \left[\int_0^{+\infty} U_{ll}(q,\ g,\ l)e^{-ml}dl\right]_g = m^2V_g(q,\ g,\ m).$$

С учетом этого получим квазилинейное уравнение первого порядка с ча стными производными относительно функции $V(q, g, m)$:

$$\frac{\partial V}{\partial g}(\sigma_2^2 m^2 + \sigma_1^2 g^2 + 2k_1 g) + 2\frac{\partial V}{\partial m}(k_2 m - k_1 g) = -2(q + k_2 m\theta)V\ . \qquad (8$$

Чтобы найти плотность $p(t,\ r,\ l|s,\ u,\ v)$, надо решить уравнение (8), вы полнить обратные преобразования Лапласа и вернуться к исходным пере менным.

1. Kazantseva O. G. // Proc. of 6th Intern. Conference CDAM'2001. Minsk, 2001. P. 17

2. Медведев Г.А. Математические модели финансовых рисков. Мн., 1999.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессо М., 1965. С. 478.

4. Wong E. // Proc. of Symposia in Applied Mathematics. 1964. XVI. P. 264.

5. Волков И.К. Случайные процессы. М., 2000. С. 299.

6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инжен ров. М., 1974. С. 228.

Поступила в редакцию 28.05.2003.

Ольга Геннадьевна Казанцева – аспирантка кафедры теории вероятностей и математи ческой статистики. Научный раководитель – доктор физико-математических наук, профе сор кафедры теории вероятностей и математической статистики Г.А. Медведев.

УДК 519.248

М.А. ПАШКЕВИЧ

СМЕЩЕНИЕ МП-ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ БЕТА-ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С АДДИТИВНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИСКАЖЕНИЯМИ

The paper is devoted to the robustness of parameter estimation for the beta-logistic model c clustered binary data in case of additive stochastic distortions of binary observations. Stochasti expansions for the bias of the maximum likelihood estimator (ML-estimator) under distortions ar obtained. It is proved that the ML-estimator is inconsistent and biased under distortions. The bias corrected estimator in the case of known distortion levels is proposed. Computer simulation result are also given.

Бета-логистическая модель данных (БЛМ) традиционно используетс для моделирования совокупности наблюдаемых последовательностей би нарных исходов случайных экспериментов на основании априорной ин формации о свойствах объектов, над которыми производятся испытания

Впервые модель была предложена Хекманом [1], после чего получила широкое применение при решении прикладных задач статистического анализа данных в маркетинге, политологии и других областях [2]. Для идентификации параметров БЛМ обычно используют метод максимального правдоподобия (ММП) [3].

Однако на практике гипотетическая вероятностная модель наблюдений, как правило, оказывается неадекватной в силу различных типов искажений [4]. Предварительные исследования, проведенные методом имитационного моделирования, показали, что в этом случае оценки параметров БЛМ могут быть смещены [5]. Поэтому актуальна задача исследования робастности (устойчивости) оценки максимального правдоподобия (МП-оценки) параметров БЛМ [1] к искажениям.

В данной работе исследуется смещение МП-оценки параметров БЛМ при аддитивных стохастических искажениях. Рассматриваемая модель искажений была предложена в [6] и активно используется при анализе робастности различных моделей бинарных данных [7] в силу своей практической значимости [8]. Нами получены выражения для смещения МП-оценки в случае известных уровней искажений, а также предложен метод компенсации этого смещения.

Математические модели и постановка задачи

Пусть определены некоторая совокупность из k объектов и некоторое случайное событие A. Над каждым объектом i этой совокупности производится серия из n_i испытаний, результаты которых описываются набором k бинарных векторов-строк $B=(B_1, B_2, \dots, B_k)$, $B_i \in \{0, 1\}^{n_i}$, $i=1, 2, \dots, k$. $B_{ij}=1$, если в испытании j для объекта i случайное событие A имело место, и $B_{ij}=0$ – в противном случае. Объекту i поставлен в соответствие вектор факторов $Z_i \in R^m$, описывающий свойства этого объекта. Предполагается, что:

П₁. Вероятностные свойства объектов в процессе испытаний не меняются.

П₂. Вероятность p_i наступления события A для i-го объекта является случайной величиной, которая имеет бета-распределение с неизвестными параметрами α_i^0, β_i^0, причем $p_1, p_2, \dots, p_k$ независимы в совокупности.

П₃. Параметры указанных бета-распределений α_i^0, β_i^0 связаны с векторами факторов Z_i выражениями $\alpha_i^0=\alpha_i(a_0)$, $\beta_i^0=\beta_i(b_0)$, где $a_0, b_0 \in R^m$ – неизвестные векторы параметров модели и $\alpha_i(a)=\exp(a^T Z_i)$, $\beta_i(b)=\exp(b^T Z_i)$, $\alpha_i(a)=\exp(a^T Z_i)$, $\beta_i(b)=\exp(b^T Z_i)$, $\forall a,\ b \in R^m$.

Пусть на результаты испытаний $B=(B_1, B_2, \dots, B_k)$ воздействуют аддитивные стохастические искажения $\{\eta_{ij}\}$ [6] и наблюдаются искаженные бинарные векторы-строки $\tilde{B}=\left(\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_k\right)$:

$$\tilde{B}_{ij}=B_{ij}\oplus\eta_{ij},\ i=1, 2, \dots, k,\ j=1, 2, \dots, n_i, \tag{1}$$

где $\oplus$ – операция сложения по модулю два, а $\{\eta_{ij}\}$, $i=1, 2, \dots, k$, $j=1, 2, \dots, n_i$, – независимые случайные величины Бернулли. При этом для каждого i, j имеет место следующая зависимость случайной величины η_{ij} от случайной величины B_{ij}:

$$P\left\{\eta_{ij}=1 \middle| B_{ij}=0\right\}=\varepsilon_0,\ P\left\{\eta_{ij}=1 \middle| B_{ij}=1\right\}=\varepsilon_1, \tag{2}$$

где ε_0, ε_1 – известные уровни искажений.

Рассматривается задача статистического оценивания параметров a_0,
по косвенным данным – искаженной выборке $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ объема k, г
$x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{b}_{ij}$ – наблюдаемое число наступлений события A для объекта i
случае искажений (1), (2). Необходимо исследовать влияние этих искаж
ний на свойства МП-оценки параметров БЛМ и предложить методы ко
пенсации возникающего из-за них смещения.

Смещение МП-оценки в случае искаженной выборки

Введем следующее обозначение для МП-оценки параметров БЛМ, п
строенной по некоторой искаженной выборке X при уровнях искажений
ε_1: $\hat{a}(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $\hat{b}(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$. В теореме 1 получено стохастическое ра
ложение для уклонения МП-оценки, позволяющее определить ее смещени
и доказать потерю состоятельности в случае искажений (1), (2).

Теорема 1. Пусть множество возможных значений факторов не бол
чем счетно: $Z_i \in \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_d\} \subset R^m$, $i = 1, 2, \ldots, k$, причем эти значени
равновероятны и для объектов с одинаковыми значениями факторов
размеры серий испытаний совпадают и равняются $\breve{n}_q$. Тогда для описанно
выше БЛМ с искажениями (1), (2) имеет место следующее стохастическ
разложение для уклонения МП-оценки параметров a_0, b_0:

$$\hat{a}(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = a_0 + \Delta a(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1), \quad \hat{b}(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = b_0 + \Delta b(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1), \quad ($$

$$\begin{pmatrix} \Delta a(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1) \\ \Delta b(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1) \end{pmatrix} = -H^{-1} G \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} + 1_{2m}\left(o(\varepsilon_0) + o(\varepsilon_1) + O_P\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right), \quad ($$

где $O_P(.)$ – символ Ландау в смысле сходимости по вероятности, 1_{2m}
единичный вектор размерности $2m$, H и G – соответственно $(2m\times 2m)$-
$(2m\times 2)$-матрицы, элементы которых определяются соотношениями:

$$H_{ls} = \sum_{q=1}^{d} \vartheta_{ql}\vartheta_{qs}\breve{\alpha}_q^0 \left(\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1} \left(\frac{1-\pi_j^q}{\breve{\alpha}_q^0 + j} - \frac{1}{\breve{\alpha}_q^0 + \breve{\beta}_q^0 + j} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1} \left(\frac{1-\pi_j^q}{\left(\breve{\alpha}_q^0 + j\right)^2} - \frac{1}{\left(\breve{\alpha}_q^0 + \breve{\beta}_q^0 + j\right)^2} \right) \breve{\alpha}_q^0 \right),$$

$$l,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$

$$H_{ls} = \sum_{q=1}^{d} \vartheta_{ql}\vartheta_{qs}\breve{\beta}_q^0 \left(\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1} \left(\frac{\pi_j^q}{\breve{\beta}_q^0 + \breve{n}_q - j - 1} - \frac{1}{\breve{\alpha}_q^0 + \breve{\beta}_q^0 + j} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1} \left(\frac{\pi_j^q}{\left(\breve{\beta}_q^0 + \breve{n}_q - j - 1\right)^2} - \frac{1}{\left(\breve{\alpha}_q^0 + \breve{\beta}_q^0 + j\right)^2} \right) \breve{\beta}_q^0 \right),$$

$$l,\ s = m+1,\ \ldots,\ 2m;$$

$$H_{sl} = H_{ls} = \sum_{q=1}^{d} \vartheta_{ql}\vartheta_{qs}\breve{\alpha}_q^0\breve{\beta}_q^0 \sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1} \frac{1}{\left(\breve{\alpha}_q^0 + \breve{\beta}_q^0 + j\right)^2},$$

$$l = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \quad s = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ 2m;$$

$$G_{l1}=\sum_{q=1}^{d}\vartheta_{ql}\breve{\alpha}_q^0\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\frac{\breve{n}_q-j}{\breve{\alpha}_q^0+j}\breve{P}_j^q,\ G_{l2}=-\sum_{q=1}^{d}\vartheta_{ql}\breve{\alpha}_q^0\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\frac{j+1}{\breve{\alpha}_q^0+j}\breve{P}_{j+1}^q,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$

$$G_{l1}=-\sum_{q=1}^{d}\vartheta_{ql}\breve{\beta}_q^0\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\frac{(\breve{n}_q-j)}{\breve{\beta}_q^0+\breve{n}_q-j-1}\breve{P}_j^q,$$

$$G_{l2}=\sum_{q=1}^{d}\vartheta_{ql}\breve{\beta}_q^0\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\frac{(j+1)}{\breve{\beta}_q^0+\breve{n}_q-j-1}\breve{P}_{j+1}^q,\ l=m+1,\ \ldots,\ 2m,$$

$$\pi_j^q=\sum\nolimits_{z=0}^{j}\breve{P}_z^q(a_0,\ b_0),\ \breve{P}_j^q(a_0,\ b_0)=C_{\breve{n}_q}^j\,B\left(\breve{\alpha}_q^0+j,\ \breve{\beta}_q^0+\breve{n}_q-j\right)/B\left(\breve{\alpha}_q^0,\ \breve{\beta}_q^0\right),$$

$$\breve{\alpha}_q^0=\exp\left(a_0^T\vartheta_q\right),\quad \breve{\beta}_q^0=\exp\left(b_0^T\vartheta_q\right).$$

Доказательство. По определению логарифмическая функция правдоподобия для БЛМ имеет следующий вид [1]:

$$l(a,\ b)=\sum_{i=1}^{k}\left(\ln\left(C_{n_i}^{x_i}\right)+\sum_{j=0}^{x_i-1}\ln\left(\alpha_i(a)+j\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=0}^{n_i-x_i-1}\ln\left(\beta_i(b)+j\right)-\sum_{j=0}^{n_i-1}\ln\left(\alpha_i(a)+\beta_i(b)+j\right)\right).\tag{5}$$

С учетом предположения о факторах Z_i функцию $l(a,\ b)$ можно представить как:

$$l(a,\ b)=\sum_{q=1}^{d}\sum_{t=1}^{k_q}\left(\ln\left(C_{\breve{n}_q}^{y_t^q}\right)+\sum_{j=0}^{y_t^q-1}\ln\left(\breve{\alpha}_q(a)+j\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-y_t^q-1}\ln\left(\breve{\beta}_q(b)+j\right)-\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\ln\left(\breve{\alpha}_q(a)+\breve{\beta}_q(b)+j\right)\right),$$

где k_q – число объектов с вектором факторов ϑ_q среди наблюдаемых k объектов, $\sum_{q=1}^{d}k_q=k$; y_t^q – наблюдаемое число наступлений события A для объекта этого типа номер q, $X=\bigcup_{q=1}^{d}\{y_1^q,\ y_2^q,\ \ldots,\ y_{k_q}^q\}$; и $\breve{\alpha}_q(a)=\exp(a^T\vartheta_q)$, $\breve{\beta}_q(b)=\exp(b^T\vartheta_q)$. Преобразуем сумму по t аналогично преобразованию системы нахождения МП-оценок параметров бета-биномиального распределения [11], в результате

$$l(a,\ b)=\lambda+\sum_{q=1}^{d}k_q\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\left(\left(1-F_j^q\right)\ln\left(\breve{\alpha}_q(a)+j\right)+F_j^q\ln\left(\breve{\beta}_q(b)+\breve{n}_q-j-1\right)-\right.$$
$$\left.-\ln\left(\breve{\alpha}_q(a)+\breve{\beta}_q(b)+j\right)\right).$$

Здесь λ – некоторая константа, а $F_j^q=\sum_{z=0}^{j}f_z^q$, где f_z^q – относительная частота встречаемости значения z в выборке $\{y_1^q,\ y_2^q,\ \ldots,\ y_{k_q}^q\}$. Воспользуемся свойством [10]: $f_z^q=\tilde{P}_z^q+O_P(1/\sqrt{k_q})$, где $\tilde{P}_z^q$ – соответствующая теоретическая вероятность. Тогда с учетом предположения о равномерном распределении возможных значений факторов $\{\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \ldots,\ \vartheta_d\}$ и свойства $O_P(.)$ получаем, что при $k\to\infty$ МП-оценка является решением задачи максимизации следующей функции:

$$l_1(a,\ b)=\sum_{q=1}^{d}\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\Big(\big(1-\tilde{\pi}_j^q\big)\ln\big(\breve{\alpha}_q(a)+j\big)+\tilde{\pi}_j^q\ln\big(\breve{\beta}_q(b)+\breve{n}_q-j-1\big)-$$

$$-\ln\big(\breve{\alpha}_q(a)+\breve{\beta}_q(b)+j\big)\Big)+O_P\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Здесь $\tilde{\pi}_j^q=\sum_{z=0}^{j}\tilde{P}_z^q(a_0,\ b_0,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$, а $\tilde{P}_z^q(a_0,\ b_0,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$ – элементы вер ятностного ряда для искаженного бета-биномиального распределения вер ятностей с параметрами $\breve{n}_q,\ \breve{\alpha}_q^0,\ \breve{\beta}_q^0,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1$ [9], причем

$$\tilde{P}_z^q(a_0,\ b_0,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=\sum_{l=1}^{\breve{n}_q}w_{zl}^q(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\breve{P}_z^q(a_0,\ b_0),$$

$$w_{zj}^q=\sum_{l=\max(j,\ z)}^{\min(\breve{n}_q,\ j+z)}C_j^{l-z}C_{\breve{n}_q-j}^{l-j}\varepsilon_0^{l-j}(1-\varepsilon_0)^{\breve{n}_q-l}\varepsilon_1^{l-z}(1-\varepsilon_1)^{j+z-l}, \qquad ($$

и имеют место следующие асимптотические разложения по ε_0, ε_1 в точке (0, 0

$$\tilde{P}_z^q=\breve{P}_z^q+\Big(\big(\breve{n}_q-z+1\big)\breve{P}_{z-1}^q-\big(\breve{n}_q-z\big)\breve{P}_z^q\Big)\varepsilon_0+$$

$$+\Big(\big(z+1\big)\breve{P}_{z+1}^q-z\ \ \breve{P}_z^q\Big)\varepsilon_1+o(\varepsilon_0)+o(\varepsilon_1), \qquad ($$

$$z=0,\ 1,\ \ldots,\ \breve{n}_q.$$

Здесь для удобства записи приняты обозначения $\breve{P}_{-1}^q=\breve{P}_{\breve{n}_q+1}^q=0$. Поскол ку МП-оценки – решения задачи $l_1(a,\ b)\to\max\limits_{a,\ b}$, то они удовлетворяют у ловию стационарности, т. е. являются решениями следующей системы о носительно a, b:

$$\sum_{q=1}^{d}\vartheta_q\breve{\alpha}_q(a)\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\left(\frac{1-\tilde{\pi}_j^q(a,\ b,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)}{\breve{\alpha}_q(a)+j}-\frac{1}{\breve{\alpha}_q(a)+\breve{\beta}_q(b)+j}\right)+1_m O_P\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=0_m, \quad (8$$

$$\sum_{q=1}^{d}\vartheta_q\breve{\beta}_q(b)\sum_{j=0}^{\breve{n}_q-1}\left(\frac{\tilde{\pi}_j^q(a,\ b,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)}{\breve{\beta}_q(b)+\breve{n}_q-j-1}-\frac{1}{\breve{\alpha}_q(a)+\breve{\beta}_q(b)+j}\right)+1_m O_P\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=0_m, \quad (9$$

где $0_m\in R^m$ – нулевой вектор. Подставим в систему (8), (9) выражения дл МП-оценки из (3), линеаризуем ее по $\Delta a(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$, $\Delta b(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$ и за меним вероятности $\tilde{P}_j^q(.)$, составляющие $\tilde{\pi}_j^q(.)$, на разложения (7). Выра зим затем уклонения $\Delta a(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$, $\Delta b(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$ этой системы. В ре зультате получим утверждение теоремы. ■

Следствие 1. В условиях теоремы 1 МП-оценки параметров БЛМ явля ются смещенными и несостоятельными, причем смещени $\Delta a_E(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=E\{\Delta a(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\}$, $\Delta b_E(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=E\{\Delta b(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\}$ удовле творяют асимптотическому разложению:

$$\begin{pmatrix}\Delta a_E(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\\ \Delta b_E(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\end{pmatrix}=-H^{-1}G\begin{pmatrix}\varepsilon_0\\ \varepsilon_1\end{pmatrix}+1_{2m}\big(o(\varepsilon_0)+o(\varepsilon_1)\big). \qquad (1($$

Доказательство. Несостоятельность следует из стохастического ра ложения (4). Разложение (10) выводится аналогично (4) (доказательств теоремы 1) с учетом свойства несмещенности относительных выборочны частот [10]. ■

Получим теперь стохастическое разложение для уклонения МП-оценки, не требующее дополнительных предположений о характере факторов, которое может быть использовано для «компенсации» смещения. Используя результаты [9], покажем, что функция правдоподобия для оценки неизвестных параметров модели a_0, b_0, учитывающая искажения (1), (2) уровней ε_0, ε_1, имеет вид:

$$L_\varepsilon(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{n_i} w^i_{x_i j}(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)P^i_j(a,\ b)\right),$$
$$P^i_j(a,\ b)=C^j_{n_i}\frac{B(\alpha_i(a)+j,\ \beta_i(b)+n_i-j)}{B(\alpha_i(a),\ \beta_i(b))}, \qquad (11)$$

где величины $w^i_{x_i j}$ определяются по формуле (6) с заменой q на i, $\tilde{n}_q$ – на n_i, z – на x_i.

Лемма 1. Имеет место следующее асимптотическое разложение для логарифмической функции правдоподобия $l_\varepsilon(a, b, X)$, соответствующей (11):

$$l_\varepsilon(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=l(a,\ b,\ X)+e(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)+o(\varepsilon_0)+o(\varepsilon_1),$$
$$e(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\left(x_i\frac{\beta_i(b)+n_i-x_i}{\alpha_i(a)+x_i-1}-(n_i-x_i)\right)\varepsilon_0+\left((n_i-x_i)\frac{\alpha_i(a)+x_i}{\beta_i(b)+n_i-x_i-1}-x_i\right)\varepsilon_1\right),$$

где функция $l(.)$ определена в (5).

Доказательство производится с помощью асимптотического разложения (7) и свойств бета-биномиального распределения [9]. ■

Лемма 2. Градиент функции $e(a, b, X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ по a, b при фиксированных уровнях искажений ε_0, ε_1 есть $2m$-вектор-строка следующего блочного вида:

$$\left(g_\varepsilon(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)^T=\left(g^a(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1),g^b(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)^T,$$
$$g^a_l(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(Z_{il}\alpha_i(a)\left(\frac{-x_i(\beta_i(b)+n_i-x_i)}{(\alpha_i(a)+x_i-1)^2}\varepsilon_0+\frac{n_i-x_i}{\beta_i(b)+n_i-x_i-1}\varepsilon_1\right)\right),$$
$$l=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$
$$g^b_l(a,\ b,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(Z_{il}\beta_i(b)\left(\frac{x_i}{\alpha_i(a)+x_i-1}\varepsilon_0-\frac{(n_i-x_i)(\alpha_i(a)+x_i)}{(\beta_i(b)+n_i-x_i-1)^2}\varepsilon_1\right)\right),$$
$$l=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Доказательство производится непосредственным дифференцированием функции $e(a, b, X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ по переменным a, b. ■

Теорема 2. Для описанной БЛМ с искажениями (1), (2) имеет место следующее стохастическое разложение для уклонения МП-оценки параметров a_0, b_0:

$$\begin{pmatrix}\Delta a(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)\\ \Delta b(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)\end{pmatrix} = J^{-1}(a_0, b_0, X)g_e(a_0, b_0, X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)+ \\ +1_{2m}\left(o(\varepsilon_0)+o(\varepsilon_1)+O_P\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right), \quad (12)$$

где вектор $g_e(.)$ определен в лемме 2, а $J(.)$ есть следующая блочная матрица:

$$J(a_0, b_0, X) = \begin{pmatrix} J^{Aa}(a_0, b_0, X) & J^{Ab}(a_0, b_0, X)\\ J^{Ba}(a_0, b_0, X) & J^{Bb}(a_0, b_0, X)\end{pmatrix},$$

$$J_{ls}^{Aa}(a_0, b_0, X) = \sum_{i=1}^{k}\left(Z_{il}Z_{is}\alpha_i^0\left(\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{\alpha_i^0+j} - \sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{\alpha_i^0+\beta_i^0+j}\right)\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\left(Z_{il}Z_{is}(\alpha_i^0)^2\left(\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{(\alpha_i^0+j)^2} - \sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{(\alpha_i^0+\beta_i^0+j)^2}\right)\right), \; l, s = 1, 2, \ldots, m,$$

$$J_{ls}^{Ab}(a, b, X) = J_{ls}^{Ba}(a, b, X) = \sum_{i=1}^{k}\left(Z_{il}Z_{is}\alpha_i^0\beta_i^0\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{(\alpha_i^0+\beta_i^0+j)^2}\right),$$

$$l, s = 1, 2, \ldots, m,$$

$$J_{ls}^{Bb}(a, b, X) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left(Z_{il}Z_{is}\beta_i^0\left(\sum_{j=0}^{n_i-x_i-1}\frac{1}{\beta_i^0+j} - \sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{\alpha_i^0+\beta_i^0+j}\right)\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\left(Z_{il}Z_{is}(\beta_i^0)^2\left(\sum_{j=0}^{n_i-x_i-1}\frac{1}{(\beta_i^0+j)^2} - \sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{(\alpha_i^0+\beta_i^0+j)^2}\right)\right),$$

$$l, s = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. МП-оценка параметров БЛМ $\hat{a}(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $\hat{b}(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ определяется как решение следующей оптимизационной задачи [1, 11]:

$$l(a, b, X) \to \max_{a,\, b}, \; a, b \in R^m. \quad (13)$$

В то же время оценка максимального правдоподобия при наличии априорной информации об аддитивных стохастических искажениях уровней ε_0 ε_1 определяется как решение оптимизационной задачи

$$l_\varepsilon(a, b, X, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = l(a, b, X) + e(a, b, X, \varepsilon_0, \varepsilon_1) + \\ +o(\varepsilon_0)+o(\varepsilon_1) \to \max_{a,\, b}, \; a, b \in R^m. \quad (14)$$

Обозначим решение задачи (14) $\hat{a}_0(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $\hat{b}_0(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ Воспользуемся свойствами асимптотической нормальности оценок максимального правдоподобия [10]:

$$\hat{a}_0(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = a_0 + 1_m O_P\left(1/\sqrt{k}\right), \; \hat{b}_0(X, \varepsilon_0, \varepsilon_1) = b_0 + 1_m O_P\left(1/\sqrt{k}\right). \quad (15)$$

Введем обозначения:

$$y=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ \hat{y}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=\begin{pmatrix}\hat{a}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\\\hat{b}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\end{pmatrix},$$

$$\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=\begin{pmatrix}\hat{a}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\\\hat{b}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\end{pmatrix},\ y_0=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}.$$

Тогда для решения $\hat{y}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$ задачи (13) выполняется следующее условие стационарности: $\partial l\left(\hat{y}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)/\partial y=0$, где производная $\partial l/\partial y$ определяется в исходных обозначениях как

$$A(a,\ b,\ X)=\frac{\partial l(a,\ b,\ X)}{\partial a}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(Z_i\alpha_i(a)\left(\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{\alpha_i(a)+j}-\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{\alpha_i(a)+\beta_i(b)+j}\right)\right)=0_m,$$

$$B(a,\ b,\ X)=\frac{\partial l(a,\ b,\ X)}{\partial b}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(Z_i\beta_i(b)\left(\sum_{j=0}^{n_i-x_i-1}\frac{1}{\beta_i(b)+j}-\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{\alpha_i(a)+\beta_i(b)+j}\right)\right)=0_m.$$

В окрестности точки $\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$ имеет место асимптотическое разложение

$$\frac{\partial l}{\partial y}\left(\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)+\left(\hat{y}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)-\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)\right)=\frac{\partial l}{\partial y}\left(\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)+$$

$$+J\left(\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)\left(\hat{y}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)-\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)+$$

$$+o\left(\hat{y}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)-y_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)=0_{2m}.$$

Из условия стационарности для задачи (14) имеем

$$\frac{\partial l}{\partial y}\left(\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)=-\frac{\partial e}{\partial y}\left(\hat{y}_0(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)\right)+1_{2m}\left(o(\varepsilon_0)+o(\varepsilon_1)\right).$$

В результате, учитывая вид зависимости $e(y,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)$ и (15), получим

$$\hat{y}(X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=y_0+J^{-1}(y_0,\ X)\frac{\partial e}{\partial y}(y_0,\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1)+1_{2m}\left(o(\varepsilon_0)+o(\varepsilon_1)+O_P\left(1/\sqrt{k}\right)\right).$$

Возвращаясь к исходным переменным a, b, получим утверждение теоремы. ■

Следствие 2. Выражение (12) может быть использовано для построения итеративной процедуры с целью уточнения МП-оценки:

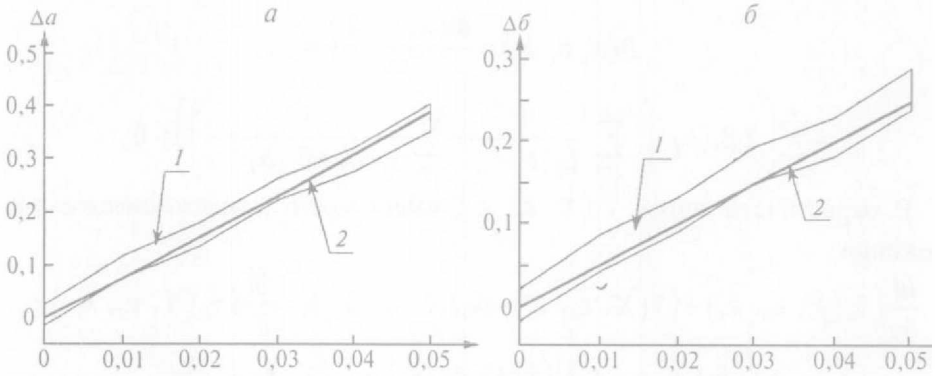
$$\begin{pmatrix}\hat{a}^{(l+1)}\\\hat{b}^{(l+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{a}^{(l)}\\\hat{b}^{(l)}\end{pmatrix}-\gamma J^{-1}\left(\hat{a}^{(l)},\ \hat{b}^{(l)},\ X\right)g_e\left(\hat{a}^{(l)},\ \hat{b}^{(l)},\ X,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1\right),$$

где l – номер итерации, а γ – параметр, обеспечивающий сходимость алгоритма.

Результаты компьютерного моделирования

Для оценки точности построенных в теоремах 1, 2 стохастических разложений была проведена серия компьютерных экспериментов. При этом в качестве номинальных параметров БЛМ были выбраны следующие значения: $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, причем предполагалось, что $m = 1$ и $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 10$, а факторы Z_i считались равномерно распределенными на отрезке [1,0; 1,1].

В процессе эксперимента генерировались 100 случайных выборок объем $k = 1000$ реализаций случайной величины, подчиняющейся БЛМ с прив денными параметрами. Для каждой выборки производилось искажен данных согласно (1), (2), при этом уровни искажений совпадали ($\varepsilon_0=\varepsilon_1=\varepsilon$) изменялись в пределах от 0 до 0,05 с шагом 0,01. Затем для каждой выбор строилась МП-оценка параметров БЛМ и вычислялись уклонения оцен параметров от истинных значений. Кроме того, при помощи выражен (12) определялся главный член асимптотического разложения для теорет ческих уклонений оценки соответствующей текущей выборки. При фикс рованном уровне искажений по полученным экспериментальным знач ниям уклонений строились 95 % доверительные интервалы, а главные чл ны асимптотических разложений для теоретических уклонений, вычисле ные согласно (12), усреднялись. Наконец, для каждого уровня искажен вычислялись средние теоретические уклонения МП-оценки при помо выражения (4). При этом предполагалось, что $d = k$ и $\vartheta_i = Z_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.



Точность построенных стохастических разложений для МП-оценки параметров (*a*, *б*) БЛМ
1 – 95 % доверительный интервал, 2 – среднее теоретическое уклонение

Результаты компьютерного моделирования приводятся на рисунке. З метим, что кривые, соответствующие выражениям (4) и (12), на рисун сливаются. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод: гла ные члены стохастических разложений (4), (12) достаточно точно аппро симируют зависимость уклонений МП-оценки параметров БЛМ от уров искажений ε, а именно попадают в 95 % экспериментальный доверител ный интервал.

1. Heckman J.J. // J. of Political Economy. 1977. Vol. 85. P. 27.
2. Pfeifer P.E. // J. of Interactive Marketing. 1998. Vol. 12(2). P. 23.
3. Ming K., Rosenbaum P.R. // Biometrics. 2000. Vol. 56(1). P. 125.
4. Kharin Yu. Robustness in Statistical Pattern Recognition. Dordrecht, 1996.
5. Heagerty P.J., Kurland B.F. // Biometrika. 2001. Vol. 88. P. 973.
6. Copas J.B. // J. of Royal Statistical Society. 1988. Vol. 50(B). P. 225.
7. Bianco A.M., Johai V.J. // Lecture Notes in Statistics. 1996. Vol. 109. P. 17.
8. Neuhaus J.M. // Biometrics. 2002. Vol. 58. P. 675.
9. Харин Ю.С., Пашкевич М.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. наву 2003. № 1. С. 11.
10. Ивченко Г.И., Медведев Ю.А. Математическая статистика. М., 1984.
11. Jonson N.L., Kotz S., Kemp A.W. Univariate Discrete Distributions. New Yor 1996.

Поступила в редакцию 19.06.2003.

Максим Анатольевич Пашкевич – аспирант кафедры математического моделирован и анализа данных. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профе сор, заведующий кафедрой Ю.С. Харин.