

$$\psi(t) = ita_1 - \nu |t|^\alpha \left(1 + i\gamma \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right),$$

где постоянные $\nu \geq 0$, $-1 \leq \gamma \leq 1$ и $\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1, \\ (2/\pi) \ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$

1. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., 1949.

2. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М., 1987.

3. Билингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1984.

5. Юдин М.Д. // Изв. вузов. Математика. 1989. № 10. С. 87.

6. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. Мн., 1990.

7. Ширяев А.Н. Вероятность. М., 1980.

8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., 1989.

Поступила в редакцию 18.04.2003.

Андрей Григорьевич Федосенко – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Г.А. Медведев.

УДК 336.763.055.4

О.Г. КАЗАНЦЕВА

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

The quasilinear equation with partial derivatives of the first order concerning a Laplace transformation of a conditional probability density of process of the interest rate is obtained.

Математическими моделями многих показателей современного финансового рынка являются случайные процессы, и в частности с независимыми приращениями, порождаемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Основным показателем, влияющим на рыночные цены финансовых активов, является так называемая безрисковая процентная ставка $r(t)$. Обычно она рассматривается как диффузионный процесс, в данной же работе это составляющая двумерного процесса:

$$\begin{cases} dr(t) = k_1(l(t) - r(t))dt + \sigma_1 \sqrt{r(t) - x} dw_1, \\ dl(t) = k_2(\theta - l(t))dt + \sigma_2 \sqrt{r(t) - x} dw_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $l(t)$ – мгновенное среднее процентной ставки, x – уровень отражающего барьера, t – календарное время, $dw_1(t)$, $dw_2(t)$ – независимые винеровские процессы с $E[dw_1(t)] = E[dw_2(t)] = 0$, $\operatorname{Var}[dw_1(t)] = \operatorname{Var}[dw_2(t)] = dt$. Параметры k_1 и k_2 определяют скорость сходимости соответствующего процесса к долгосрочному среднему (скорость установления стационарного режима), θ – установившееся среднее число процессов $r(t)$ и $l(t)$. Величины $k_1(l(t) - r(t))$ и $k_2(\theta - l(t))$ являются ожидаемыми мгновенными скоростями изменения роста переменных состояния $r(t)$ и $l(t)$, а $\sigma_1^2(r(t) - x)$ и $\sigma_2^2(r(t) - x)$ – мгновенными дисперсиями изменений этих двух переменных, причем параметры k_1 , k_2 , σ_1 , σ_2 положительны из экономических соображений.

К сожалению, ограниченный объем не позволяет продемонстрировать поведение двумерного процесса рыночных показателей, описываемого системой уравнений (1), с помощью численного моделирования. Однако такой пример был приведен автором ранее [1] для одномерного случая, причем рассматривалась задача не только моделирования процесса, но и оценки его параметров.

В реальном случае наблюдается процесс $r(t)$, а в качестве оценки процесса $l(t)$ можно рассматривать тренд $r(t)$. Таким образом, мы имеем дело с двумерным однородным во времени марковским процессом, принимающим значения в некотором открытом подмножестве $D = [x, +\infty) \cdot [x, +\infty) \in R^2$.

Процессы $r(t)$, $l(t)$, определяемые системой (1), относятся к классу диффузионных процессов Орнштейна – Уленбека, имеющих стационарный режим с конечным средним θ и конечными дисперсиями [2].

Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$, где Ω – состояние рынка в рассматриваемом контексте; сигма-алгебра F – совокупность событий, наблюдаемых на рынке, P – риск-нейтральная вероятностная мера на F ; расширяющееся семейство сигма-алгебр F_t – совокупность событий, наблюдаемых на рынке до момента t включительно (для всяких $v \leq t \leq T$ имеем $F_v \subseteq F_t$, $F \equiv F$).

Плотность вероятностей перехода $p(t, r, l | s, u, v)$ диффузионного процесса $\{r(t), l(t)\}$ существует и удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова [3] (аргументы функции p для краткости будем опускать, а частные производные обозначать через нижний индекс):

$$(r-x) \left[\frac{\sigma_1^2}{2} p_{rr} + \frac{\sigma_2^2}{2} p_{ll} \right] - k_1(l-r)p_r - k_2(\theta-l)p_l + (k_1+k_2)p = p_t. \quad (2)$$

Как известно, прямое и обратное уравнения Колмогорова в общем случае не могут быть разрешены явно для переходной плотности вероятности, за исключением небольшого числа частных случаев [4]. В данной статье предпринята попытка понизить порядок уравнений Колмогорова с помощью преобразования Лапласа.

Из свойства стационарности имеем: $p(t, r, l | s, u, v) = p(t-s, r, l | 0, u, v)$. В качестве начального будем рассматривать состояние в момент времени $t=0$ и изучать условную плотность вероятности $p(t, r, l | 0, u, v)$, которую для краткости будем записывать как $p(t, r, l)$.

Поскольку начальное состояние марковского процесса $\{r(t), l(t)\}$ предполагается заданным, то функция условной плотности вероятности в начальный момент времени вырождается в δ -функцию Дирака:

$$p(t, r, l) |_{t=0} = \delta(r(t) - r(0))\delta(l(t) - l(0)). \quad (3)$$

Граничные условия для любого уравнения Колмогорова фактически являются условиями изолированности области $D \in R^2$ изменения рассматриваемого марковского процесса [5]. Граничные условия для отражающего барьера представляют собой равенства:

$$k_1(l-r)p - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial r}((r-x)p) = 0, \quad k_2(\theta-l)p - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial l}((r-x)p) = 0, \quad (4)$$

когда r или l попадают на границу области D .

Проведем замену переменных. Перейдем от $r(t)$, $l(t)$, θ к $\tilde{r}(t) = r(t) - x$, $\tilde{l}(t) = l(t) - x$, $\tilde{\theta}(t) = \theta - x$. Тогда уравнение (2) запишется в виде (опускаем

волну над новыми переменными, но будем помнить о том, что мы сделали замену):

$$\frac{\sigma_1^2 r}{2} p_{rr} + \frac{\sigma_2^2 r}{2} p_{ll} + (k_1(r-l) + \sigma_1^2) p_r + k_2(l-\theta) p_l + (k_1 + k_2) p = p_t. \quad (5)$$

Оно является дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка. С помощью преобразований Лапласа можно понизить порядок уравнения (5).

В результате замены переменных вид начального условия (3) не изменится, а граничные условия (4) запишутся в виде:

$$k_1(l-r)p - \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial r}(rp) = 0, \quad k_2(\theta-l)p - \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial l}(lp) = 0. \quad (4')$$

Откуда следует:

$$p(t, r=0, l)=0, \quad p(t, r, l=0)=0, \quad \frac{\partial p}{\partial l}(t, r, l=0)=0. \quad (4'')$$

Применим к уравнению (5) преобразование Лапласа [6] по t с параметром $q > 0$: $Y(q, r, l) = \int_0^{+\infty} p(t, r, l) e^{-qt} dt$.

В выражении $\int_0^{+\infty} p_l(t, r, l) e^{-qt} dt = qY(q, r, l) - p(t=+0, r, l)$ второе слагаемое в правой части в силу начального условия (3) равно нулю. Поэтому после применения преобразования Лапласа имеем:

$$\frac{\sigma_1^2 r}{2} Y_{rr} + \frac{\sigma_2^2 r}{2} Y_{ll} + (k_1(r-l) + \sigma_1^2) Y_r + k_2(l-\theta) Y_l + (k_1 + k_2 - q) Y = 0. \quad (6)$$

Далее используем преобразование Лапласа по переменной r с параметром $g > 0$: $U(q, g, l) = \int_0^{+\infty} Y(q, r, l) e^{-gr} dr$.

Приведем результаты применения преобразования Лапласа к некоторым слагаемым уравнения (6), учитывая условия (4''):

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} Y_r(q, r, l) e^{-gr} dr &= gU(q, g, l) - Y(q, r=+0, l) = gU(q, g, l), \\ \int_0^{+\infty} rY_{ll}(q, r, l) e^{-gr} dr &= - \left[\int_0^{+\infty} Y_{ll}(q, r, l) e^{-gr} dr \right]_g = -[U_g(q, g, l)]_g, \\ \int_0^{+\infty} rY_r(q, r, l) e^{-gr} dr &= - \left[\int_0^{+\infty} Y_r(q, r, l) e^{-gr} dr \right]_g = -U(q, g, l) - gU_g(q, g, l), \\ \int_0^{+\infty} rY_{rr}(q, r, l) e^{-gr} dr &= -[g^2 U(q, g, l) - Y_r(q, r=+0, l)]_g = -[g^2 U(q, g, l)]_g. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате преобразования Лапласа получим:

$$-\frac{\sigma_2^2}{2} (U_g)_g + k_2(l-\theta) U_l + (k_2 - k_1 g l - q) U - (k_1 g + \frac{\sigma_1^2 g^2}{2}) U_g = 0. \quad (7)$$

К этому уравнению также применим преобразование Лапласа по переменной l с параметром $m > 0$: $V(q, g, m) = \int_0^{+\infty} U(q, g, l) e^{-ml} dl$.

Приведем результаты применения преобразования Лапласа к некоторым слагаемым уравнения (7) с учетом условий (4''):

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} l U(q, g, l) e^{-ml} dl &= - \left[\int_0^{+\infty} U(q, g, l) e^{-ml} dl \right]_m = -V_m(q, g, m), \\ \int_0^{+\infty} U_l(q, g, l) e^{-ml} dl &= mV(q, g, m) - U(q, g, l=+0) = mV(q, g, m), \\ \int_0^{+\infty} l U_l(q, g, l) e^{-ml} dl &= - \left[\int_0^{+\infty} U_l(q, g, l) e^{-ml} dl \right]_m = -(mV(q, g, m))_m, \\ \int_0^{+\infty} (U_g(q, g, l))_{ll} e^{-ml} dl &= \left[\int_0^{+\infty} U_{ll}(q, g, l) e^{-ml} dl \right]_g = m^2 V_g(q, g, m).\end{aligned}$$

С учетом этого получим квазилинейное уравнение первого порядка с частными производными относительно функции $V(q, g, m)$:

$$\frac{\partial V}{\partial g} (\sigma_2^2 m^2 + \sigma_1^2 g^2 + 2k_1 g) + 2 \frac{\partial V}{\partial m} (k_2 m - k_1 g) = -2(q + k_2 m \theta) V. \quad (8)$$

Чтобы найти плотность $p(t, r, l|s, u, v)$, надо решить уравнение (8), выполнить обратные преобразования Лапласа и вернуться к исходным переменным.

1. Kazantseva O. G. // Proc. of 6th Intern. Conference CDAM'2001. Minsk, 2001. P. 179.
2. Медведев Г. А. Математические модели финансовых рисков. Мн., 1999.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965. С. 478.
4. Wong E. // Proc. of Symposia in Applied Mathematics. 1964. XVI. P. 264.
5. Волков И. К. Случайные процессы. М., 2000. С. 299.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974. С. 228.

Поступила в редакцию 28.05.2003.

Ольга Геннадьевна Казанцева – аспирантка кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Г. А. Медведев.

УДК 519.248

М. А. ПАШКЕВИЧ

СМЕЩЕНИЕ МП-ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ БЕТА-ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С АДДИТИВНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИСКАЖЕНИЯМИ

The paper is devoted to the robustness of parameter estimation for the beta-logistic model of clustered binary data in case of additive stochastic distortions of binary observations. Stochastic expansions for the bias of the maximum likelihood estimator (ML-estimator) under distortions are obtained. It is proved that the ML-estimator is inconsistent and biased under distortions. The bias-corrected estimator in the case of known distortion levels is proposed. Computer simulation results are also given.

Бета-логистическая модель данных (БЛМ) традиционно используется для моделирования совокупности наблюдаемых последовательностей бинарных исходов случайных экспериментов на основании априорной информации о свойствах объектов, над которыми производятся испытания