Математика и информатика

УДК 519.95

Г.П. ВОЛЧКОВА

К ГИПОТЕЗЕ О ПЛОТНЫХ OPEN-SHOP РАСПИСАНИЯХ

We study the scheduling problem **Om||C**$_{max}$. It is proved that hypothesis $C_{max}(s)/C_{max}(s^*)\leq 2-1/$
is correct for a dense schedule s of a specific type.

Рассматривается следующая задача теории расписаний: множеств $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ работ обслуживается в системе из $M=\{1, 2, \ldots, m\}$ прибороı Для всех работ множества N маршрут обслуживания (порядок прохождени приборов) заранее не задан и может быть различным для различных рабо Заданы также длительности обслуживания каждой работы на каждом пр боре. В любой момент времени каждая работа обслуживается не более че одним прибором, который обслуживает не более одной работы одновре менно. Требуется построить расписание выполнения работ в такой системе т. е. тем или иным способом указать для каждой пары «работа – прибор интервал времени, в котором этот прибор обслуживает данную работу. Бу дем рассматривать расписание, оптимальное относительно следующего кри терия качества: минимизировать общее время завершения обслуживани всех работ. В теории расписаний такая задача обозначается как **Om||C**$_{ma}$ Расписание будем искать в среде плотных расписаний, т. е. таких расписа ний, когда нет простаивающего прибора при наличии доступной для об служивания работы. Существует гипотеза [1], что для плотного расписани s и любого m $C_{max}(s)/C_{max}(s^*)\leq 2-\dfrac{1}{m}$, где s^* – оптимальное расписание.

Под операцией (i, j) будем понимать выполнение работы i на опреде ленном приборе j, $i=\overline{1,\ n}$; $j=\overline{1,\ m}$, где t_{ij} – длительность операции (i, j).

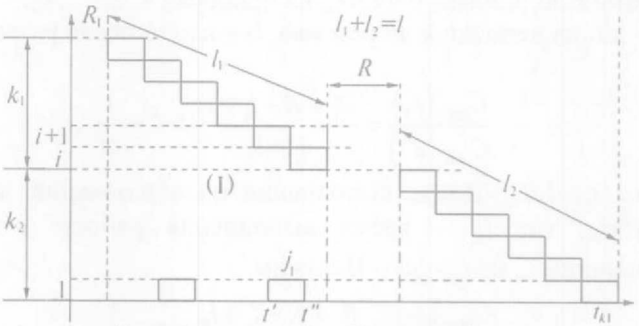
Рассмотрим сначала любое плотное расписание s, в котором выделен работа k, которая выполняется в этом расписании последней. Последова тельность всех операций работы i назовем цепочкой и будем обозначать е длину через $l(i)$, $l(i)=\sum\limits_{j\in M} t_{ij}$.

Не нарушая общности, можно считать, что последняя операция работы выполняется на первом приборе и время ее выполнения равно t_{k1}. Опреде лим B как сумму длин операций, выполняемых на первом прибор $B=\sum\limits_{i=1}^{n} t_{i1}$, и пусть $l=l(k)$.

Разрывом цепочки работы k будем называть интервал времени, когда ни одна операция этой цепочки не выполняется, при этом некоторые операции были выполнены ранее. Основным результатом будет доказательство того факта, что если цепочка имеет один разрыв, то гипотеза справедлива.

В дальнейшем длину разрыва цепочки будем обозначать через R.

Разобьем множество всех приборов $M=\{1, 2, \ldots, m\}$ на два непересекающихся подмножества: $K_1=\{k_2+1, \ldots, m\}$ и $K_2=\{1, 2, \ldots, k_2\}$, где K_1 – множество приборов, на которых выполняется цепочка до разрыва R, K_2 – после разрыва. Пусть R_1 – время начала выполнения цепочки работы k (рисунок).



Фрагмент расписания. Цепочка работы k

Для оптимального решения справедливы следующие нижние оценки:

$$C_{\max}\left(s^*\right) \geq l, \tag{1}$$

$$C_{\max}\left(s^*\right) \geq \mathrm{Level}(T),$$

$$C_{\max}\left(s^*\right) \geq B, \tag{2}$$

$$C_{\max}\left(s^*\right) \geq L_{\max},$$

где Level(T) определяется как средняя загрузка по множеству приборов T, $T \subseteq M$, а именно Level(T)$=\sum_{i\in N}\sum_{j\in T} t_{ij} \,/\left|T\right|$, а $L_{\max}$ определяется как максимальная длина длин всех цепочек $L_{\max} = \max_{i\in N}\left\{l(i)\right\}$.

Рассмотрим функцию $f\left(s,\, T\right) = \dfrac{C_{\max}\left(s\right)}{\max\left(B,\, l,\, L_{\max},\, \mathrm{Level}(T)\right)}$, которая связана с плотным расписанием s. Для доказательства гипотезы достаточно найти максимальное значение не больше чем $2-1/m$ этой функции для всех возможных плотных расписаний.

Для функции $f(s, T)$ определим преобразования, которые сохраняют свойство плотности расписания, при этом значение функции не уменьшается.

Пусть (t', t'') – интервал времени до разрыва, когда прибор 1 занят работой j_1, а операции работы k выполняются на другом приборе. Тогда модифицируем длительности операций, которые выполняются в интервале (t', t'') по следующему правилу: $t_{xy_x} = t_{xy_x} - z_x$, где x – номер работы, y_x – номер прибора, на котором выполняется операция (x, y_x) в заданном временном интервале, z_x – длительность выполнения этой операции в этом интервале, а длину операции $(k, 1)$ определим как $t_{k1}=t_{k1}+t''-t'$.

Значения l и B не изменились, а длины операций всех цепочек, выпол няемых в интервале (t', t''), уменьшились. Понятно, что параметры $L_{\max}$ Level(T) не увеличатся для любого множества T. После выполнения таки преобразований можно получить плотное расписание s_1, при котором в время выполнения работ цепочки k на приборах k_2+1, …, m никакие опера ции не выполняются на первом приборе, т. е. имеют нулевую длительност

Аналогичным образом поступаем для всех приборов i, $i=\overline{2,\ k_2}$. Тогд будет получена конфигурация, в которой в интервале $[R_1, R_1+l_1]$ на прибо рах i, $i=\overline{1,\ k_2}$, ни одна работа не будет выполняться, т. е. на рисунке об ласть (I) будет пуста. Область (I) – интервал времени от начала выполнени цепочки работы k до разрыва цепочки на приборах 1, 2, …, k_2.

Пусть l_1 – длина цепочки k до разрыва, l_2 – длина после разрыва, тогда и (1) следует

$$\frac{C_{\max}\left(s_1\right)}{C_{\max}\left(s^*\right)}=\frac{R_1+R+l_1+l_2}{l_1+l_2}>2-\frac{1}{m} \ . \qquad (3$$

Определим $t_{\text{ср}}=l_2/k_2$. После выполнения преобразований из (2) имее $C_{\max}(s^*)\geq R_1+R+t_{ki}$, где t_{ki} – время выполнения работы k на прибор i, $i=\overline{1,\ k_2}$. Заменим t_{ki} на $t_{\text{ср}}=l_2/k_2$. Получим

$$\frac{C_{\max}\left(s_1\right)}{C_{\max}\left(s^*\right)}=\frac{R_1+R+l_1+l_2}{R_1+R+l_2/k_2}>2-\frac{1}{m}. \qquad (4$$

Обозначим через T_2 множество работ, выполняемых в разрыве R на при борах $\{1, .. , k_2\}$, а $t_2=|T_2|$ – количество работ в этом множестве. Понятно что суммарная длительность выполнения в разрыве будет равна Rk_2, сред няя длительность цепочек этих работ – Rk_2/t_2.

Рассмотрим произвольную работу $\tau\in T_2$. Общая длительность ее выпол нения не меньше l_1+d_2, где d_2 – суммарная длительность выполнения опера ции работы τ в разрыве.

Поэтому средняя длина цепочек работ из T_2 равна $l_{\text{ср}}=l_1+Rk_2/t_2$.

Тогда имеем $C_{\max}(s^*)\geq Rk_2/t_2+l_1$.

Средняя загрузка по приборам из множества K_1 – Level(K_1) $=(R_1k_1+l_1+l_1t_2)/k_1$. Для оптимального решения справедливы оценк $C_{\max}(s^*)\geq l_{\text{ср}}$, $C_{\max}(s^*)\geq$Level(K_1).

Пусть $k_1>k_2$. Определим $C=R_1+R+l_2/k_2$. В этом случае

$$C_{\max}\left(s_1\right)=R_1+R+l_1+l_2=C-l_2/k_2+l. \qquad (5$$

Пусть гипотеза не выполняется, т. е.

$$\frac{C-l_2/k_2+l}{l_{\text{ср}}}>2-\frac{1}{m}. \qquad (6$$

Докажем, что

$$\frac{C-l_2/k_2+l}{\text{Level}\left(K_1\right)}\leq 2-\frac{1}{m}. \qquad (7$$

Случай 1. $C\leq l$. Не умаляя общности, будем считать, что $l=1$, $C=1-\Delta$, $\Delta\geq$(Из (3) имеем:

$$C-l_2/k_2+1>2-\frac{1}{m},\ \ 1-\Delta-l_2/k_2+1>2-\frac{1}{m},\ \ \frac{l_2}{k_2}<\frac{1}{m}-\Delta\,.$$

Полагаем $l_2/k_2=\dfrac{1}{m}-\Delta-\varepsilon$, получаем $l_2=k_2/m-k_2\Delta-k_2\varepsilon$.

Тогда из (5): $R_1+R+l_1+l_2=1+C-l_2/k_2=1+1-\Delta-\left(\frac{1}{m}-\Delta-\varepsilon\right)=2-\frac{1}{m}+\varepsilon$.

Пусть неравенство (6) выполняется, т. е. $\frac{2-1/m+\varepsilon}{l_1+Rk_2/t_2}>2-\frac{1}{m}$. Покажем, что

$$Rk_2/t_2<l_2+\varepsilon. \tag{8}$$

Предположим обратное: $Rk_2/t_2\geq l_2+\varepsilon$.

Тогда $l_1+Rk_2/t_2\geq l_1+l_2+\varepsilon=1+\varepsilon$, следовательно, $\frac{2-1/m+\varepsilon}{1+\varepsilon}\leq 2-\frac{1}{m}$.

Получили противоречие. Оценим знаменатель в левой части дроби (4). Из соотношений

$$R_1+R=1-\frac{1}{m}+\varepsilon, \tag{9}$$

$$l_2/k_2=\frac{1}{m}-\Delta-\varepsilon, \tag{10}$$

$t_2\geq k_2$, $k_1+k_2=m$ и (8) имеем:

$$R<(l_2+\varepsilon)t_2/k_2, \tag{11}$$

$$l_2=k_2m-\Delta k_2-\varepsilon k_2,$$

$$l_1=1-k_2/m+k_2(\Delta+\varepsilon).$$

С учетом (9) и (11) получим $R_1>1-\frac{1}{m}+\varepsilon-(l_2+\varepsilon)t_2/k_2$. Откуда

$$R_1+\frac{l_1(t_2+1)}{k_1}>1-\frac{1}{m}+\varepsilon-\frac{t_2}{k_2}(l_2+\varepsilon)+\frac{t_2+1}{k_1}\left(1-\frac{k_2}{m}+k_2(\Delta+\varepsilon)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{m}+\varepsilon-\frac{t_2}{k_2}l_2-\frac{t_2}{k_2}\varepsilon+\frac{t_2+1}{k_1}\left(1-\frac{k_2}{m}+k_2(\Delta+\varepsilon)\right).$$

Подставим вместо l_2 его значения из (10) в Level(K_1), получаем

$$R_1+\frac{l_1(t_2+1)}{k_1}>$$

$$>1-\frac{1}{m}+\varepsilon-t_2\left(\frac{1}{m}-\Delta-\varepsilon\right)-t_2/k_2\,\varepsilon+\frac{t_2+1}{k_1}(1-k_2/m)+\frac{t_2+1}{k_1}k_2(\Delta+\varepsilon)=$$

$$=1-\frac{1}{m}-\frac{t_2}{m}+\frac{t_2+1}{k_1}\left(1-\frac{k_2}{m}\right)+\Delta\left(t_2+\frac{(t_2+1)k_2}{k_1}\right)+\varepsilon\left(1+\frac{t_2(k_2-1)}{k_2}+\frac{(t_2+1)k_2}{k_1}\right).$$

Из $1-\frac{1}{m}-t_2/m+\frac{(t_2+1)}{k_1}(1-k_2/m)\geq 1$ следует $R_1+\frac{l_1(t_2+1)}{k_1}\geq 1+\varepsilon$. Поэтому для соотношения (7) выполняется $\frac{2-\frac{1}{m}+\varepsilon}{1+\varepsilon}\leq 2-\frac{1}{m}$.

В случае $l\leq C$ доказательство проводится аналогично.

1. Chen Bo, Strusevich V.A. // ORSA J. on Computing. 1993. Vol. 5. № 3.

Поступила в редакцию 16.04.2003.

Галина Петровна Волчкова – ассистент кафедры дискретной математики и алгоритмики.