которое можно заменить на более предпочтительное правило расчета

$$\delta^j(\alpha_i) = \tau\sum_{k=0}^{i-1} A_k^j(\alpha_i,\mu)[f(t+\alpha_k\tau,\ y+\delta^j(\alpha_k)) - \mu\delta^j(\alpha_k)] +$$

$$+\tau\sum_{k=i}^{j-1} A_k^j(\alpha_i,\mu)[f(t+\alpha_k\tau,\ y+\delta^{j-1}(\alpha_k)) - \mu\delta^{j-1}(\alpha_k)], \qquad (8)$$

если учесть, что вычисляемые значения $\delta^j(\alpha_i)$ могут заменить в правой части (6) менее точные поправки $\delta^{j-1}(\alpha_i)$. После вычисления по формуле (8) значений всех поправок, необходимых для построения метода $s$-го порядка, итоговая поправка $\delta^s(\alpha)$ строится по формуле (6) с заменой $\alpha_i$ на $\alpha$, $j$ на $s$.

$S$-стадийный МПП, задаваемый формулами (6)–(8) и (5) с заменой $j$ на $s$, можно рассматривать как явный $p$-стадийный метод Рунге-Кутты

$$\varphi_i = f(t+c_i\tau,\ y+\tau\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}\varphi_j),\quad i=1,2,\dots,p,\quad p=s(s-1)/2+1, \qquad (9)$$

$$y(t+\alpha\tau) = y+\tau\sum_{i=1}^{p} b_i(\alpha)\varphi_i,\quad 0\le\alpha\le 1, \qquad (10)$$

$$c = (0,\quad \alpha_1,\quad \alpha_1,\alpha_2,\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\quad \dots,\quad \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{s-1})^T,$$

что позволяет ставить вопрос об оптимальном выборе параметров $\alpha_i$, например, с целью минимизации коэффициентов погрешности [3, с. 168] метода (9)–(10). В случае $\mu=0$ ненулевые коэффициенты $\beta_{ij}, b_i$ задаются формулами

$$\beta_{l(j,i),l(j,k)} = A_k^j(\alpha_i),\quad k=0,1,\dots,i-1;\quad \beta_{l(j,i),l(j-1,k)} = A_k^j(\alpha_i),\quad k=i,i+1,\dots,j-1;$$

$$b_{l(s-1,k)}(\alpha) = A_k^s(\alpha),\quad k=0,1,\dots,s-1,$$

где $j$=1,2,…,$s$–1, $i$=1,2,…,$j$, $l=l(j,k) = \begin{cases} j(j-1)/2+k+1, & k\ge 1, \\ 1 & k=0. \end{cases}$

При $\mu\ne 0$ приходим к скорректированным методам Рунге-Кутты, точным на решениях системы $u'=\mu u+q(t)$, где $q(t)$ – многочлен степени не выше $s$–1.

1. Бобков В.В., Борисевич А.М.// Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 3. С. 52.

2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории численных методов. Дифференциальные уравнения. Мн., 1982.

3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.

Поступила в редакцию 25.01 2000.

УДК 517.9

Е.М. РАДЫНО

# ОБ ОТНОШЕНИИ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ДИАМЕТРУ

Generalization of the notion of number $\pi$ for arbitrary norm of euclidian plane is given and strict estimate of $\pi$ is obtained.

Обобщение длины на плоскости приводит к задаче, поставленной впервые, по-видимому, Питером Лаксом: обобщить число $\pi$ и получить его точную оценку.

Кривой назовем произвольное непрерывное отображение единичного отрезка в метрическое пространство $f:[0,1]\to X$, длиной кривой $L(f)$ – верхнюю грань множества сумм $\sum_{k=1}^{n}\rho(f(x_{k-1}),f(x_k))$, где $\rho$ – метрика, $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$. Длина кривой не меньше расстояния между ее концами $L(f)\geq\rho(f(0),f(1))$.

На плоскости $E^2$ с метрикой $\rho$ выделим круги $B[O,r]=$ $=\{X\in E^2:\rho(O,X)\leq r\}$ и окружности $S[O,r]=\{X\in E^2:\rho(O,X)=r\}$. Окружности могут быть пустым множеством даже в метрике, топологически эквивалентной евклидовой. Поэтому ограничимся нормами плоскости – метриками, которые задаются нормой векторов $\rho(A,B)=\|\boldsymbol{AB}\|$. Отрезок $[XY]$ отождествим с кривой $f:[0,1]\to E^2:t\mapsto Z$, где $\boldsymbol{XZ}=t\boldsymbol{XY}$.

**Лемма 1.** *Нормы плоскости обладают свойствами:*

*1) длина отрезка совпадает с расстоянием между его концами;*

*2) $B[O,r]$ и $S[O,r]$ – центрально-симметричные фигуры;*

*3) $B[O,r]$ – выпуклая фигура, т. е. вместе с точками $X,Y$ содержит и весь отрезок $[XY]$;*

*4) класс ограниченных множеств един для всех норм плоскости.*

Доказательство. Свойства 1–3 просто следуют из определения нормы. Эквивалентное 4 утверждение см. в [1, с. 158].

**Лемма 2.** *Пусть $\Phi$ – выпуклая ограниченная центрально-симметричная фигура с центром в точке $O$, содержащая свою границу $\Gamma$. Тогда $\Gamma$ является единичной окружностью с центром $O$ для некоторой (единственной) нормы плоскости.*

Доказательство. Введем норму векторов, которая и задаст нужную норму плоскости. Положим $\|0\|=0$. Для произвольного $\boldsymbol{OX}\neq\boldsymbol{0}$ рассмотрим луч $[OX)$ и точку $X'=[OX)\cap\Gamma$. Тогда $\boldsymbol{OX}=\lambda\boldsymbol{OX'}$ для некоторого $\lambda>0$. Положим $\|\boldsymbol{OX}\|=\lambda$. Очевидно, $X\in\Gamma$ равносильно $\|\boldsymbol{OX}\|=1$, а $X\in\Phi$ равносильно $\|\boldsymbol{OX}\|\leq 1$. Для введенной нормы (однозначно определяемой фигурой $\Phi$) проверим здесь лишь неравенство треугольника.

Если хотя бы один вектор равен $\boldsymbol{0}$, то неравенство треугольника выполнено. Пусть $\boldsymbol{OZ}=\boldsymbol{OX}+\boldsymbol{OY}$, $\|\boldsymbol{OX}\|=a$, $\|\boldsymbol{OY}\|=b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. По определению $\boldsymbol{OX}=a\boldsymbol{OX'}$, $\boldsymbol{OY}=b\boldsymbol{OY'}$, где $X',Y'\in\Gamma\subset\Phi$. Рассмотрим $\boldsymbol{OZ''}=\frac{1}{a+b}\boldsymbol{OZ}=$ $=\frac{a}{a+b}\boldsymbol{OX''}+\frac{b}{a+b}\boldsymbol{OY''}$. Имеем $\boldsymbol{X'Z'}=\frac{b}{a+b}\boldsymbol{X'Y'}$. Поскольку $\frac{b}{a+b}\in[0,1]$, то $Z''\in[X'Y']\subset\Phi$, откуда вытекает $\frac{1}{a+b}\|\boldsymbol{OZ}\|=\|\boldsymbol{OZ''}\|\leq 1$, что и доказывает неравенство треугольника.

Пусть $B_E=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$ – единичный круг в некоторой прямоугольной системе координат $Oxy$ в $E^2$ и $\varphi$ – параметризация единичной окружности $\varphi:t\mapsto(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$, где $t\in[0,1]$. Пусть $h:B_E\to\Phi\subset E^2$ – гомеоморфизм. Периметром $P(\Phi)$ назовем $L(h\circ\varphi)$ – длину кривой $h\circ\varphi$, образ которой является границей $\Phi$. Периметр $P(\Phi)$ зависит лишь от $\Phi$.

Если Ф выпуклая, то гомеоморфизм $h$ существует и всякая ломаная, приближающая границу Ф, образует вписанный выпуклый многоугольник.

**Лемма 3.** *Пусть* $\Phi$ *и* $\Phi_0$ *– выпуклые ограниченные фигуры плоскости и* $\Phi \subset \Phi_0$, *тогда* $P(\Phi) \le P(\Phi_0)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный выпуклый многоугольник $M=A_1A_2...A_n$, вписанный в Ф. Построим выпуклые фигуры $\Phi_1 \supset ... \supset \Phi_n = M$, отрезая от $\Phi_0$ по очереди куски вдоль прямых $A_1A_2$, $A_2A_3$,... , $A_nA_1$. При этом криволинейные части границы заменяются на не превосходящие их по длине отрезки: $P(\Phi_0) \ge P(\Phi_1) \ge ... \ge P(\Phi_n) = P(M)$. Взяв верхнюю грань по всем многоугольникам $M$, получаем: $P(\Phi_0) \ge \sup P(M) = P(\Phi)$.

*Следствие.* Периметры ограниченных выпуклых фигур конечны.

Длиной окружности $S[O,r]$ назовем периметр круга $B[O,r]$. Для произвольной нормы плоскости ρ положим π(ρ) равным половине длины единичной окружности $S[O,1]$. Например, для нормы, порожденной правильным шестиугольником, π=3.

**Теорема 1.** *Число* π(ρ) *принимает все значения из отрезка* $[3,4]$ *и только эти значения.*

Доказательство. Пусть $S = S[O,1]$ – единичная окружность для нормы ρ. Доказательство проведем в три этапа.

1. Пусть $O_1 \in S$. Рассмотрим окружности $S_1$ и $S_2$ – образы S при параллельных переносах на векторы $\boldsymbol{OO}_1$ и $\boldsymbol{OO}_2 = -\boldsymbol{OO}_1$ соответственно. Множество $S_1 \cap S$ содержит по точке в обоих полуплоскостях относительно прямой $OO_1$. Обозначим их $K$ и $L$. При сдвиге точек $K$, $L$ на вектор $\boldsymbol{OO}_2$ получаются точки $N$, $M \in S_2 \cap S$ соответственно. Используя лемму 3, заключаем, что $P(S) \ge P(O_1KNO_2ML) = \|O_1K\| + \|NK\| + \|NO_2\| + \|O_2M\| + \|ML\| + \|LO_1\| = 6 \cdot 1 = 6$ и $\pi \ge 3$.

2. Среди параллелограммов с центрами в точке $O$, вписанных в $S$, есть параллелограмм $KLMN$ с наибольшей площадью (в обычном смысле). Действительно, площадь $KLMN$ непрерывно зависит от пары точек $(K,L) \in S \times S$ и применима теорема Вейерштрасса, так как $S$ компактна.

Параллелограмм $KLMN$, очевидно, не вырожден. Проведем две пары прямых через $K$, $M$ параллельно $LN$ и через $L$, $N$ параллельно $KM$, которые при пересечении образуют параллелограмм $PTUV$ ($K \in PT$, $L \in VP$). Прямая $VP$ – опорная, т. е. нет никакой точки $X \in S$, лежащей "выше" прямой $VP$ (иначе площадь $KLMN$ не минимальна). Аналогично прямые $PT$,$TU$ и $UV$ – опорные. Согласно лемме 3 $P(S) \le P(PTUV) = \|PT\| + \|TU\| + \|UV\| + \|VP\| = 4 \cdot 2 = 8$ и $\pi \le 4$.

3. Выберем на плоскости систему координат. В качестве единичной окружности, задающей норму плоскости, возьмем шестиугольник $H(t)$ с координатами вершин $A(1,0)$, $B\left(\frac{1+t}{2}, \frac{1+t}{2}\right)$, $C(0,1)$, $D(-1,0)$, $E\left(-\frac{1+t}{2}, -\frac{1+t}{2}\right)$, $F(0,-1)$, где $t \in [0,1]$. Периметр $P(H(t)) = \|AB\| + \|BC\| +$

$+\|CD\|+\|DE\|+\|EF\|+\|FA\|=1+1+\dfrac{2}{1+t}+1+1+\dfrac{2}{1+t}$ принимает значения на всем отрезке [6, 8].

**Теорема 2.** Пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ – нормы плоскости, $S_1[O_1,1]$ и $S_2[O_2,1]$ – соответствующие единичные окружности и существует такое $A$ – аффинное преобразование плоскости, что $S_2 = A(S_1)$. Тогда $\pi(\rho_1)=\pi(\rho_2)$.

Доказательство. Из условия видно, что $\|e\|_1=1 \Leftrightarrow \|A(e)\|_2=1$. Всякий $a\neq 0$ представим в виде $a=\|a\|_1 e$, где $\|e\|_1=1$. Поскольку $A(a)=\|a\|_1\ A(e)$, то $\|A(a)\|_2=\|a\|_1$. Пусть $[X_1Y_1]$ – хорда $S_1$, $[X_2Y_2]=A([X_1Y_1])$ – хорда $S_2$. Имеем $\rho_1(X_1,Y_1)=\|X_1Y_1\|_1=\|X_2Y_2\|_2=\rho_2(X_2,Y_2)$. Таким образом, у всех выпуклых многоугольников $M_1$ и $M_2=A(M_1)$, вписанных в $S_1$ и $S_2$, периметры в соответствующих нормах совпадают. Взяв верхнюю грань по всем $M_1$, получаем требуемое.

*Следствие.* Всякой норме, задаваемой скалярным произведением, соответствует $\pi$=3,14159…, хотя обратное и неверно.

Как следствие изложенного, возникает критерий, который профессор Я.В. Радыно предложил доказать или опровергнуть.

**Гипотеза.** *Пусть банахово пространство X имеет линейную размерность большую двух. Пространство X является гильбертовым тогда и только тогда, когда число $\pi$ для всех сужений нормы на двумерные подпространства X равняется 3,14159… .*

Автор данной статьи благодарен профессору Я.В. Радыно за постановку задачи и внимание.

1. Антоневич А.Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн., 1984.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

Поступила в редакцию 13.04.2000.

*УДК 621.382.323–416*

*А.Д. АНДРЕЕВ, В.М. БОРЗДОВ, В.О. ГАЛЕНЧИК*

## ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОНОВ В КАНАЛЕ СУБМИКРОННОГО МОП-ТРАНЗИСТОРА

The technique to estimate the total electron charge in the channel of submicron MOSFET is developed. This technique allows to estimate of the total electron charge in the channel both in the linear and saturation modes.

При моделировании МОП-транзисторов "методом крупных частиц" весьма важным вопросом, который при этом необходимо решать, является нахождение величины заряда электронов в проводящем канале прибора. Знание суммарного заряда электронов необходимо для определения заряда отдельно взятой "крупной частицы" и согласования процедуры моделирования переноса электронов с процедурой расчета напряженностей электрических полей в структуре [1].

В режиме работы прибора с непрерывным проводящим каналом поверхностный заряд инверсных электронов может быть оценен по известной формуле [2]