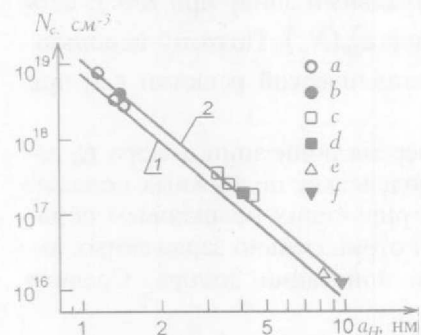


легированных атомами As, P, Sb, B и Ga, а также для *n*-InP и *n*-GaAs. При расчете по формуле (6) полагалось $\epsilon_r=12$, что соответствует средней величине относительной диэлектрической проницаемости кристаллической решетки перечисленных кристаллических полупроводников [11].



Зависимость критической концентрации перехода изолятор–металл N_c от боровского радиуса $a_H = e^2 / (8\pi\epsilon\epsilon_0 I_d)$ изолированной водородоподобной примеси при $K \approx 0,01$:

1 – расчет N_c с учетом зависимости α от концентрации примеси по формулам (2) и (3) при $K = 0,01$; 2 – $E_d = I_d$. Экспериментальные данные (см [32]): а – *n*-Si (Si:As, Si:P, Si:Sb); б – *p*-Si:B; в – *n*-Ge (Ge:As, Ge:P, Ge:Sb); д – *p*-Ge:Ga; е – *n*-InP; ф – *n*-GaAs

лей приводит к формуле КМЛЛ, связывающей магнитную восприимчивость вещества с восприимчивостью отдельного диполя.

Автор выражает благодарность С.А. Вырко и А.И. Сягло за обсуждения и помощь в оформлении рукописи.

1. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., 1978.
2. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М., 1989.
3. Кастеллан Дж., Зейтц Ф. // В сб.: Полупроводниковые материалы. М., 1954. С. 14.
4. Dhar S., Marshak A.H. // Sol.-St. Electronics. 1985. Vol. 28. № 8. P. 763.
5. Поклонский Н.А., Сягло А.И. // ФТТ. 1998. Т. 40. № 1. С. 147.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Квантовая механика. М., 1989.
7. Edwards P.P., Sienko M.J. // Phys. Rev. 1978. Vol. B 17. № 6. P. 2575.
8. Поклонский Н.А., Сягло А.И., Бискупски Г. // ФТП. 1999. Т. 33. № 4. С. 415.
9. Забродский А.Г. // УФН. 1998. Т. 168. № 7. С. 804.
10. Кудинов Е.К. // ФТТ. 1991. Т. 33. № 8. С. 2306.
11. Semiconductors – Basic Data /Ed. O. Madelung. Berlin, 1996.
12. Гинзбург В.Л., Максимов Е.Г. // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. 1992. Т. 5. № 9. С. 1543.
13. Виноградов А.П. // РЭ. 1999. Т. 44. № 9. С. 1131.

Поступила в редакцию 21.03 2000.

УДК 539.3

М.Д. МАРТЫНЕНКО, С.М. БОСЯКОВ

ПОВЕРХНОСТИ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА В ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Wave processes in thermoelastic cubic anisotropic medium with regard the finite velocity of heat's propagation are investigated from the points of view of theory of strong discontinuities.

Рассматриваются тела, термоупругие свойства которых характеризуются четырьмя материальными постоянными. Выражения для тензора напряжений в этом случае имеют вид [1, 2]:

$$\sigma_{ii} = (\lambda_{11} - \lambda_{12}) e_{ii} + \lambda_{12} \sum_{k=1}^3 e_{kk} - \beta T, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = 2\lambda_{44} e_{ij} - \beta T, i \neq j = \overline{1,3},$$

Здесь $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ – компоненты тензора деформаций, λ_{11} , λ_{12} ,

λ_{44} , β – материальные постоянные термоупругой среды.

Подставляя (1) в уравнения движения [2]

$$\sum_{i=1}^3 \partial_j \sigma_{ij} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2)$$

получим

$$(\Delta + (\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44}) \partial_i^2) u_i + (\lambda_{12} + \lambda_{44}) \partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \beta \partial_i T. \quad (3)$$

Для того чтобы получить полную систему дифференциальных уравнений термоупругости для кубически анизотропного тела в отсутствие эффекта связности полей смещения и температуры, присоединим к (3) обобщенный закон теплопроводности [3]. В результате придем к такой системе

$$(\Delta + (\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44}) \partial_i^2) u_i + (\lambda_{12} + \lambda_{44}) \partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \beta \partial_i T, \quad (4)$$

$$\Delta T = \frac{1}{a_T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\alpha c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2},$$

где T – приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния, α_T – коэффициент температуропроводности, c – скорость распространения тепла, α – коэффициент теплопроводности. Отметим также и то, что второе уравнение (4) записано для случая, когда отсутствуют внутренние источники тепла.

Предположим, что первые производные от компонент вектора смещения $u = (u_1, u_2, u_3)$ и приращения температуры T претерпевают сильные разрывы на гладкой поверхности $\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$. В этом случае производные $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \frac{\partial u_k}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial T}{\partial t}, i, k = \overline{1,3}$, фактически непрерывны с каждой из сторон поверхности φ вплоть до точек самой поверхности. Этот факт совместно с непрерывностью u_k позволяет сформулировать такие кинематические условия совместности [4, 5]:

$$p_k \frac{\partial u_i}{\partial t} - p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = M_{ki}, i, k = \overline{1,3}, \quad (5)$$

$$p_k \frac{\partial T}{\partial t} - p_0 \frac{\partial T}{\partial x_k} = M_k. \quad (6)$$

Здесь введены такие обозначения $p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, $p_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $k = \overline{1,3}$.

Также при распространении поверхностей разрыва должны выполняться динамические условия совместности для термоупругих полей [4]:

$$\sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} p_k - \rho p_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = M_{4i}, i = \overline{1,3}, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_k} p_k - \frac{1}{\alpha c^2} p_0 \frac{\partial T}{\partial t} = M_{44}. \quad (8)$$

Соотношения (5)–(8) будем рассматривать как шестнадцать алгебраических уравнений для шестнадцати производных первого порядка от T , u_1 , u_2 , u_3 . Чтобы привести систему (5)–(8) к более простому виду, умножим уравнения (7), (8) на p_0 и получающиеся выражения $p_0 \frac{\partial u_m}{\partial x_n}$, $p_0 \frac{\partial T}{\partial x_n}$ заменим правыми частями следующих равенств:

$$p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = p_k \frac{\partial u_i}{\partial t} - M_{ki}, i, k = \overline{1,3},$$

$$p_0 \frac{\partial T}{\partial x_k} = p_k \frac{\partial T}{\partial t} - M_k.$$

В результате приходим к системе четырех уравнений относительно $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$:

$$M_{4i} \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_i}{\rho} \left(A_{11} p_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{12} \left(p_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + p_l \frac{\partial u_l}{\partial t} \right) \right) +$$

$$+ \frac{A_{44}}{\rho} \left(p_k^2 \frac{\partial u_l}{\partial t} + p_k p_l \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_l}{\partial t} \right) + p_l^2 \frac{\partial u_k}{\partial t} \right) - p_0^2 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \dots, i \neq k \neq l = \overline{1,3},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \left(\sum p_n^2 - \frac{1}{\alpha c^2} p_0^2 \right) = p_0 M_{44} + \dots$$

Частные производные первого порядка от компонент вектора смещения u_i и приращения температуры T могут иметь разрывы непрерывности на поверхности ϕ , которая определяется из условия неразрешимости системы (9). Это эквивалентно равенству нулю ее главного определителя:

$$\det A = 0,$$

где A – матрица, составленная из коэффициентов при $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $i = \overline{1,3}$ и $\frac{\partial T}{\partial t}$ системы (9). Раскрывая определитель, получим

$$(\lambda_{44} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \rho p_0^2)^3 + (\lambda_{11} + \lambda_{44}) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) (\lambda_{44} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \rho p_0^2)^2 +$$

$$+ (\lambda_{11} + \lambda_{12}) (\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44}) (\lambda_{44} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \rho p_0^2) (p_1^2 p_2^2 + p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_3^2) +$$

$$+ (\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44})^2 (\lambda_{11} + \lambda_{44} + \lambda_{12}) p_1^2 p_2^2 p_3^2 \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{1}{\alpha c^2} p_0^2 \right) = 0.$$

Заметим, что уравнение (10) сильных разрывов поля смещений и температуры с точностью до множителя совпадает с уравнением характеристик для системы (4)

$$((g^2 - \rho Z_t^2)^3 + (\varepsilon + \sigma)(g^2 - \rho Z_t^2)^2 + \varepsilon(\varepsilon + 2\sigma)(g^2 - \rho Z_t^2) \times$$

$$\times (Z_{x_1}^2 Z_{x_2}^2 + Z_{x_2}^2 Z_{x_3}^2 + Z_{x_1}^2 Z_{x_3}^2) + \varepsilon^2(\varepsilon + 3\sigma) Z_{x_1}^2 Z_{x_2}^2 Z_{x_3}^2)(c^2 g^2 - \frac{1}{\alpha} Z_t^2) = 0. \quad (11)$$

Здесь $Z = Z(t, x_1, x_2, x_3)$ – характеристическая поверхность системы (4),

$$g^2 = Z_{x_1}^2 + Z_{x_2}^2 + Z_{x_3}^2, \quad \varepsilon = \lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44}, \quad \sigma = \lambda_{12} + \lambda_{44}.$$

Разделив обе части (10) на $(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^4$, получим уравнение четвертой степени относительно квадратов скоростей распространения поверхностных сильных разрывов $v^2 = \frac{p_0^2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ для определения скоростей квазипродольной, квазипоперечных упругих и квазитепловой волн. Фиксируя произвольно на поверхности ϕ точку N с нормалью $\mathbf{n}$ к элементу по-

верхности $d\varphi_N$, можно рассчитать скорости распространения указанных типов волн в направлении n . Так, например, для характерных в кубических кристаллах осей симметрии четвертого и третьего порядка имеем соответственно [6]:

$$p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1, \quad (12)$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (10), получим:

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{\lambda_{44}}{\rho}}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{\lambda_{11}}{\rho}}. \quad (12')$$

В случае (13) для расчета скоростей продольной и поперечных волн приходим к кубическому уравнению стандартного вида $y^3 + py + q = 0$, где

$$y = \frac{\lambda_{44}(3-\rho) + \lambda_{11}\rho}{3\rho} - v^2,$$

$$p = -\frac{\lambda_{44}^2}{3\rho^2}(\lambda_{12} + \lambda_{44})^2,$$

$$q = \frac{\lambda_{44}^3}{27\rho^3}((\lambda_{11} - \lambda_{44})^3 - 2(\lambda_{11} - \lambda_{12} - 2\lambda_{44})(\lambda_{11}^2 - \lambda_{11}\lambda_{44} + \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{12}\lambda_{44} + \lambda_{12}^2)).$$

Скорость тепловой волны v_T в кубически анизотропном теле в отсутствие эффекта связности тепловых и деформационных полей оказывается равной $c\sqrt{\alpha}$ независимо от выбранного внутри кристалла направления.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., 1986.
2. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.
3. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Киев, 1976.
4. Петрашень Г. И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. М., 1980.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1981. Т. 4. Ч. 2.
6. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., 1965.
7. Теребушко О. И. Основы теории упругости и пластичности. М., 1985.

Поступила в редакцию 25.11.99.

УДК 519.62

Е.Б. СОНЕЦ

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПОПРАВК И ЯВНЫЕ МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТЫ

A variant of the method of successive corrections in the case of an initial value problem for a system of ordinary differential equations is considered. Formulas for derivation of continuous explicit exponentially fitted Runge-Kutta methods constructed on the basis of the presented technique are given.

В работе [1] был предложен метод последовательных поправок (МПП) – способ построения одношаговых методов сколь угодно высокого порядка точности численного решения начальных задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (1)$$

являющийся обобщением классического принципа последовательного повышения порядка точности результата (см., напр., [2, с. 31]).