УДК 519.62

В.В. БОБКОВ, Н.А. БОБКОВА

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК

A new way of constructing one step methods of the recursive type with an arbitrary high order of accuracy for an initial value problem in the case of a system of ordinary differential equations is proposed. Calculation of the improved approximation to the solution is performed with account of the main part of the defect of the preceding approximation.

Целью работы является построение последовательности локальных приближений при численном решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'(x)=f(x,u(x)),\quad x=t+\xi,\quad 0\le\xi\le\tau,\quad \tau>0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(t)=y. \tag{2}$$

В качестве стартового приближения к решению задачи (1), (2) изберем, например, функцию

$$y_1(x)=y+\frac{1-\exp(-\mu\xi)}{\mu}f, \tag{3}$$

где $f=f(t,y), \mu\ge\|f_u(t,y)\|$. Привлекательной чертой такого выбора является то, что в случае $\mu=\|f_u(t,y)\|$ функция $y_1(x)$ совпадает с точным решением скалярного дифференциального уравнения вида

$$u'(x)=\lambda u(x)+a \tag{4}$$

при $u(t)=y$ и любых значениях числовых параметров a и $\lambda<0$.

Так как $[1-\exp(-\mu\xi)]/\mu=\xi+O(\xi^2)$, то расчетная формула (3) может быть истолкована как скорректированный явный метод Эйлера для задачи (1), (2). При этом отмеченное применительно к (4) свойство этого метода положительно характеризует уровень его устойчивости и в общем случае системы (1) (о других важных свойствах метода (3) см., напр., в [1]).

Так как (см. (3))

$$y_1'(x)=\exp(-\mu\xi)f, \tag{5}$$

то посредством равенства

$$y_1'(x)+\rho_1(x)=f(x,y_1(x)) \tag{6}$$

можно определить невязку

$$\rho_1(x)=f(x,y_1(x))-\exp(-\mu\xi)f \tag{7}$$

приближенного решения (3) на исходной системе (1). Кроме того, с учетом (1)–(3), (5) для локальной погрешности $\varepsilon_1(x)=u(x)-y_1(x)$, $\varepsilon_1(t)=0$, метода (3) можно поставить задачу Коши

$$\varepsilon_1'(x)=f(x,y_1(x)+\varepsilon_1(x))-\exp(-\mu\xi)f,\quad \varepsilon_1(t)=0, \tag{8}$$

при этом дополнительно к (8), принимая во внимание (6) , можно записать:

$$\varepsilon_1'(x)=\rho_1(x)+f(x,u(x))-f(x,y_1(x)). \tag{9}$$

Из (9) непосредственно следует равенство

$$\varepsilon_1(x)=\varepsilon_1^*(x)+\int_0^\xi\left[f(t+\gamma,u(t+\gamma))-f(t+\gamma,y_1(t+\gamma))\right]d\gamma,$$

где

$$\varepsilon_1^*(x)=\int_0^\xi\rho_1(t+\gamma)d\gamma. \tag{10}$$

Так как
$$f(x,u(x))-f(x,y_1(x))=\int_0^1 f_u(x,y_1(x)+\sigma\varepsilon_1(x))d\sigma\,\varepsilon_1(x),$$

то величина $\varepsilon_1^*(x)$, задаваемая формулой (10), при достаточно малых $\xi>0$ может служить в качестве главной части локальной ошибки $\varepsilon_1(x)$. Поэтому добавлением $\varepsilon_1^*(x)$ к $y_1(x)$ (добавлением $\rho_1(x)$ к $y_1(x)$) получим улучшенное приближение к $u(x)$, которое в свою очередь снова уточним, рассматривая его как стартовое в уже описанном процессе. Такой способ построения последовательности приближений к $u(x)$, обобщающий широко известный процесс последовательных приближений Пикара [2, с. 48], сопряжен при его численной реализации с проблемой вычисления интегралов типа (10). Для того чтобы снять эту проблему, рассмотрим видоизмененную схему построения такого рода приближений, выделяя из каждой последовательной дифференциальной невязки ее главную часть в виде многочлена по ξ соответствующей степени.

Прежде всего представим невязку (7) в виде
$$\rho_1(x)=a_{1,1}\xi+\varphi_2(x). \qquad (11)$$

Очевидно, что при любом значении векторного параметра $a_{1,1}$ справедливо равенство $\varphi_2(t)=0$. С целью уменьшить норму второго слагаемого в правой части (11) потребуем дополнительно, чтобы $\varphi_2(t+\xi_1)=0$, где $\xi_1\in(0,\tau]$. Это приводит к равенству
$$a_{1,1}=\frac{1}{\xi_1}\left[f(t+\xi_1,y_1(t+\xi_1))-\exp(-\mu\xi_1)f\right]. \qquad (12)$$

Тем самым можно явно выписать главную точно интегрируемую по ξ часть $\tilde\rho_1(x)$ дифференциальной невязки $\rho_1(x)$:
$$\tilde\rho_1(x)=a_{1,1}\xi. \qquad (13)$$

Добавлением (13) к $y_1'(x)$ находим
$$y_2'(x)=y_1'(x)+\tilde\rho_1(x)=\exp(-\mu\xi)f+a_{1,1}\xi$$
и
$$y_2(x)=y_1(x)+\tilde\varepsilon_1^*(x),$$
где (ср. (10))
$$\tilde\varepsilon_1^*(x)=\int_0^\xi\tilde\rho_1(t+\gamma)\,d\gamma=\frac{1}{2}a_{1,1}\xi^2.$$

Аналогично (6), (7) для нового приближения $y_2(x)$ можно выписать дифференциальную невязку $\rho_2(x)=f(x,y_2(x))-y_2'(x)=f(x,y_2(x))-y_1'(x)-\tilde\rho_1(x)$, немногочленную часть $f(x,y_2(x))-\exp(-\mu\xi)f$ которой, подобно (11), запишем в виде $f(x,y_2(x))-\exp(-\mu\xi)f=a_{2,1}\xi+a_{2,2}\xi(\xi-\xi_1)+\varphi_3(x)$. Очевидно, что $\varphi_3(t)=0$. Потребуем дополнительно, чтобы $\varphi_3(t+\xi_1)=0$ и $\varphi_3(t+\xi_2)=0$, где $\xi_2\in(0,\tau]$, при этом $\xi_2\neq\xi_1$. Это позволяет последовательно найти
$$a_{2,1}=\frac{1}{\xi_1}\left[f(t+\xi_1,y_2(t+\xi_1))-\exp(-\mu\xi_1)f\right] \quad (\text{ср. } (12)),$$
$$a_{2,2}=\frac{1}{\xi_2(\xi_2-\xi_1)}\left[f(t+\xi_2,y_2(t+\xi_2))-\exp(-\mu\xi_2)f-a_{2,1}\xi_2\right],$$

$$\tilde{\rho}_2(x) = a_{2,1}\,\xi + a_{2,2}\,\xi(\xi - \xi_1) - \tilde{\rho}_1(x) = (a_{2,1} - a_{1,1})\xi + a_{2,2}\,\xi(\xi - \xi_1),$$

$$y_3'(x) = y_2'(x) + \tilde{\rho}_2(x) = y_1'(x) + \tilde{\rho}_1(x) + \tilde{\rho}_2(x),$$

$$y_3(x) = y_1(x) + \tilde{\varepsilon}_1^*(x) + \tilde{\varepsilon}_2^*(x),$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_2^*(x) = \int_0^{\xi} \tilde{\rho}_2(t+\gamma)\,d\gamma .$$

Отталкиваясь от полученного приближения $y_3(x)$, по описанной выше методике процесс уточнения можно продолжить. Аналогично проделанному на этом (третьем) этапе находим:

$$a_{3,1} = \frac{1}{\xi_1}\left[f(t+\xi_1, y_3(t+\xi_1)) - \exp(-\mu\xi_1)f\right],$$

$$a_{3,2} = \frac{1}{\xi_2\,p_1(\xi_2)}\left[f(t+\xi_2, y_3(t+\xi_2)) - \exp(-\mu\xi_2)f - q_{3,1}(t+\xi_2)\right],$$

$$a_{3,3} = \frac{1}{\xi_3\,p_2(\xi_3)}\left[f(t+\xi_3, y_3(t+\xi_3)) - \exp(-\mu\xi_3)f - q_{3,2}(t+\xi_3)\right],$$

$$\tilde{\rho}_3(x) = q_{3,3}(x) - \tilde{\rho}_1(x) - \tilde{\rho}_2(x),$$

$$\tilde{\varepsilon}_3^*(x) = s_{3,3}(x) - \tilde{\varepsilon}_1^*(x) - \tilde{\varepsilon}_2^*(x),$$

$$y_4'(x) = y_1'(x) + \tilde{\rho}_1(x) + \tilde{\rho}_2(x) + \tilde{\rho}_3(x),$$

$$y_4(x) = y_1(x) + \tilde{\varepsilon}_1^*(x) + \tilde{\varepsilon}_2^*(x) + \tilde{\varepsilon}_3^*(x).$$

Здесь для сокращения записей использованы следующие обозначения:

$$p_m(\xi) = \prod_{k=1}^{m}(\xi - \xi_k), \quad m \ge 1, \tag{14}$$

$$q_{i,j}(x) = \sum_{k=1}^{j} a_{i,k}\,\xi\,p_{k-1}(\xi), \quad i \ge j,\ j \ge 1, \quad p_0(\xi) \equiv 1,$$

$$\tilde{\varepsilon}_i^*(x) = \int_0^{\xi} \tilde{\rho}_i(t+\gamma)\,d\gamma, \quad i \ge 1,$$

$$s_{i,j}(x) = \int_0^{\xi} q_{i,j}(t+\gamma)\,d\gamma .$$

И аналогично в случае i-го этапа приближений можно записать:

$$a_{i,1} = \frac{1}{\xi_1}\left[f(t+\xi_1, y_i(t+\xi_1)) - \exp(-\mu\xi_1)f\right], \quad i \ge 1,$$

$$a_{i,j} = \frac{1}{\xi_j\,p_{j-1}(\xi_j)}\left[f(t+\xi_j, y_i(t+\xi_j)) - \exp(-\mu\xi_j)f - q_{i,j-1}(t+\xi_j)\right],$$

$$i \ge j, \quad j = 2, 3, \ldots, i\ ,$$

$$\tilde{\rho}_1(x) + \tilde{\rho}_2(x) + \ldots + \tilde{\rho}_i(x) = q_{i,i}(x),$$

$$\tilde{\rho}_j(x) = q_{j,j}(x) - q_{j-1,j-1}(x), \quad j \ge 2,$$

$$\tilde{\varepsilon}_1^*(x) + \tilde{\varepsilon}_2^*(x) + \ldots + \tilde{\varepsilon}_i^*(x) = s_{i,i}(x),$$

$$\tilde{\varepsilon}_j^*(x) = s_{j,j}(x) - s_{j-1,j-1}(x), \quad j \ge 2,$$

$$y'_{i+1}(x) = y'_i(x) + \tilde{\rho}_i(x) = y'_1(x) + \tilde{\rho}_1(x) + \tilde{\rho}_2(x) + \ldots + \tilde{\rho}_i(x),$$

$$y_{i+1}(x) = y_i(x) + \tilde{\varepsilon}^*_i(x) = y_1(x) + \tilde{\varepsilon}^*_1(x) + \tilde{\varepsilon}^*_2(x) + \ldots + \tilde{\varepsilon}^*_i(x), \quad i \geq 1.$$

Если степень m многочлена $p_m(\xi)$ невелика, то непосредственным перемножением скобок в правой части (14) этот многочлен приводится к виду, удобному для точного интегрирования. Чтобы эту процедуру автоматизировать, что особенно актуально в случае $m >> 1$, перепишем многочлен (14) в форме

$$p_m(\xi) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \xi^{m-k} p_{m,k}. \tag{15}$$

Так как по построению $p_m(\xi) = (\xi - \xi_m) p_{m-1}(\xi)$, $m \geq 1$, то для определения коэффициентов $p_{m,k}$ из (15) можно записать следующие рекурсивные формулы:

$$p_{m,k} = \begin{cases} 1, \quad k = 0, \\ p_{m-1,k} + \xi_m p_{m-1,k-1}, \quad k < m, \\ \xi_m p_{m-1,k-1}, \quad k = m. \end{cases}$$

Очевидно, что эти коэффициенты, как и сам многочлен $p_m(\xi)$, не связаны с исходной задачей, а зависят только от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$.

В заключение заметим, что в общей схеме рассмотренных построений существенных изменений не произойдет, если в качестве стартового приближения вместо (3) избрать приближенное решение задачи (1), (2), полученное любым другим численным методом, при этом под производной приближенного решения следует понимать его локальную производную [3].

1. Бобков В.В., Бобкова Н.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 2. С. 47.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. М., 1990.
3. Бобков В.В. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1174.

Поступила в редакцию 21.06.2000.

УДК 621.321.1:519.1

Н.И. ЛИСТОПАД, А.Г. КОПАЧЕВ

СИНХРОНИЗАЦИЯ ПОТОКОВ МУЛЬТИМЕДИА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СРЕДАХ

In this paper we have presented a set of algorithms for achieving synchronization in a best-effort distributed system. These algorithms, based on numerical timestamps, take into account both the possible frame lost due to the device buffers overflow at the sender, and the display time of a video frame at the receiver.

We extended the solution to n continuous streams synchronization that have the same or different sources.

Одна из основных проблем при реализации систем мультимедиа – способ синхронизации потоков данных. В статье описывается новый метод синхронизации потоков в распределенных средах с использованием временных меток. Представлены алгоритмы, реализующие данный метод, которые основаны на числовых метках и учитывают как потери кадров из-за переполнения буфера устройства, так и время вывода кадра у получателя.