В общем случае можно показать, что функция оседаний $U_3(x_1,x_3)$ является решением такого дифференциального уравнения:

$$(\Delta - k^2)U(x_1x_2)=h, \qquad (21)$$

где $k^2=-n_2/n_1$, $h=d/n_2$.

Анализ уравнения типа (21), процедуры решения граничных задач для (21) методом интегральных уравнений описаны в [4, 5].

* * *

Подводя итог выполненных исследований, можно сделать следующий вывод.

Использование полуобратного метода Сен-Венана является корректным и перспективным при решении различных задач прикладной геомеханики. Данный подход относится к группе экспериментально-аналитических методов, при использовании которых можно добиться наиболее адекватного описания реального поведения геомеханических процессов. Описанный подход позволяет не только строить легкие в реализации системы разрешающих уравнений, но и выполнять исследования на корректность начальных (граничных) условий, принятых физических гипотез и допущений, а также собственно полученного решения.

В следующей части будет приведено решение конкретных задач применительно к месторождению калийных солей в Беларуси (г. Солигорск).

1. Ишлинский А.Ю. Применение полуобратного метода Сен-Венана к приближенному решению некоторых задач теории упругости // Прикладные задачи механики. М., 1975. Т. 2. С. 33.

2. Журавков М.А., Земсков А.Н., Смычник А.Д. Влияние природных и техногенных факторов на неодинамическое состояние литосферы в районах геологических нарушений. Мн., 1997.

3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1987. Т. 1.

4. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Метод квазифункций Грина в механике деформируемого твердого тела. Мн., 1993.

5. Журавков М.А., Мартыненко М.Д. Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. Мн., 1995.

Поступила в редакцию 07.12.99.

УДК 517.958

В.Т. БОРУХОВ, В.И. КОРЗЮК

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

The method inversion of linear dynamical system is presented to study a number of inverse problem for reconstruction of boundary date in the abstract transfer equation. Example is presented.

Задачи восстановления граничных режимов процессов переноса возникают в различных разделах науки и техники и относятся к классу обратных задач математической физики [1]. Традиционный подход к таким задачам состоит в сведении их с помощью функции Грина прямой задачи к интегральным уравнениям Вольтерра 1-го рода.

В работах [2, 3] предложен другой подход, основанный на теории обратимости линейных динамических систем в пространстве состояний [3]. Обращение динамической системы связано с задачей восстановления неизвестных входных воздействий на систему по измерениям ее выходных данных. В теории переноса искомыми воздействиями могут быть изменяющиеся во времени амплитуды источников тепла или вещества, граничные режимы процессов переноса, например граничные тепловые нагрузки, переменные во времени контактные тепловые сопротивления и т. д.

В общем случае обратные динамические системы для рассматриваемого круга задач описываются системами интегродифференциальных уравнений с неклассическими краевыми условиями. В данной работе рассматривается случай, когда обратные динамические системы описываются дифференциальными уравнениями с неклассическими краевыми условиями.

1. Абстрактная схема построения обратной динамической системы. Абстрактная математическая модель для широкого класса процессов переноса имеет вид дифференциально-операторной системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Lw(t),\ w(0) = w_0,\ t > 0, \tag{1}$$

$$lw(t) = Bu(t), \tag{2}$$

где $L: H \to H$ – линейный замкнутый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, $l: H \to \partial H$ – линейный оператор граничных условий, действующий из H в ∂H, $B: U \to \partial H$ – линейный оператор, характеризующий пространственное распределение граничного режима переноса. Конкретный выбор операторов L, l, B и пространств H, U зависит от детализации задачи (потенциала переноса, характеристик среды, геометрии системы и т. д.).

Естественное ограничение, выделяющее обозримый класс систем вида (1), (2), состоит в том, что сужение A оператора L на множество решений уравнения $lw = 0$ является производящим оператором сильно непрерывной в нуле полугруппы $e^{At}, t > 0$ (полугруппы класса C_0) [4]. Данное ограничение обеспечивает корректность начально-краевой задачи (1), (2) в смысле Адамара и, как правило, выполняется для математических моделей переноса.

Рассмотрим задачу восстановления функции $u: [0, \infty) \to U$ по дополнительной информации $y: [0, \infty) \to U$, определяемой соотношением

$$y(t) = Cw(t),\ t \geq 0, \tag{3}$$

где $C: H \to Y$ – линейный оператор, Y – пространство возможных значений функции $y(\cdot)$.

Уравнения (1)–(3) можно интерпретировать как описание в пространстве состояний H динамической системы (обозначим ее символом Σ) вход–состояние–выход, для которой $u(\cdot), y(\cdot)$ – входной и выходной сигналы соответственно, $w(t)$ – состояние системы в момент времени t.

Задача восстановления функции $u: [0, \infty) \to U$ с этой точки зрения вкладывается в задачу построения обратной динамической системы Σ^{-1}.

Для построения системы Σ^{-1} предположим, что область значений $R(B)$ оператора B замкнута, а ядро Ker$B$ тривиально (Ker$B$=0). Пусть $P: U \to U$ – проектор на область значений $R(B)$. Тогда уравнение (2) можно переписать в эквивалентной форме

$$Plw(t) = PBu(t),\ (I - P)lw = 0, \tag{4}$$

где I – тождественный оператор в пространстве U. Из условия Ker$B$=0 и замкнутости пространства $R(B)$ следует существование оператора $(PB)^{-1}: R(B) \to U$, т. е. согласно (4) $u(t) = (PB)^{-1} Plw$.

Отсюда и из (1)–(3) легко следует, что обратная система Σ^{-1} имеет вид

$$w_t = Lw(t), w(0) = w_0, \tag{5}$$

$$(I-P)lw(t) = 0, Cw(t) = y(t), \tag{6}$$

$$u(t) = (PB)^{-1} Plw(t). \tag{7}$$

Предположим далее, что сужение F оператора L на множество решений системы уравнений

$$(I-P)lw = 0, Cw = 0$$

является производящим оператором полугруппы класса C_0. Тогда из (5)–(7) вытекает аналитическое представление решения обратной задачи по восстановлению функции $u(\cdot)$

$$u(t) = (PB)^{-1} Pl\left(e^{Ft} w_0 + \int_0^t e^{F(t-s)} B_0 y(s) ds\right), \tag{8}$$

где B_0 – стандартизирующий оператор, обеспечивающий эквивалентность двух систем уравнений: (5)–(6) и

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Fw(t) + B_0 y(t), w(0) = w_0.$$

Основные трудности, возникающие при реализации данного подхода, состоят в доказательстве существования и построении полугруппы e^{Ft}. В связи с этим отметим, что в зависимости от способа измерения процесса $w(t)$ оператор C может быть точечным, дифференциальным, интегральным, типа внутренней суперпозиции и т. д. Следовательно, в общем случае система уравнений (5), (6) представляет собой начально-краевую задачу с неклассическими граничными условиями. Задачи такого вида возникают в различных областях исследований и привлекают внимание многих авторов [5–8]. В частности, в [7, 8] изучен вопрос о наиболее общих дополнительных граничных условиях, сужающих эллиптический оператор до производящего оператора сжимающей и сохраняющей положительность полугруппы класса C_0.

Отметим еще одну форму представления системы Σ^{-1}. Предположим, что существует линейный оператор $T: Y \to U$, с которым выполняется условие Ker$C$=KerPTC. Тогда равенства $Cw(t) = y(t)$, $PTCw(t) = PTy(t)$ эквивалентны. Отсюда и из свойств проекционных операторов следует, что система уравнений (6) равносильна уравнению

$$((I-P)l + PTC)w(t) = PTy(t). \tag{9}$$

Таким образом, обратная ДС Σ^{-1} может быть представлена также системой уравнений (5), (7), (9).

2. Восстановление граничных тепловых потоков по данным взвешенных измерений температуры на границе.

Пусть задана плоская неограниченная пластина, подверженная тепловому воздействию с одной стороны и теплоизолированная – с другой.

Процесс переноса тепла в пластине описывается системой уравнений

$$T_t = T_{xx} + T_{zz}, T(x,z,0) = T_0(x,z) \quad (T = T(x,z,t)), \tag{10}$$

$$-T_z(x,1,t) = b(x)u(t), T_z(x,0,t) = 0. \tag{11}$$

Обратная задача состоит в восстановлении изменяющейся во времени функции $u:[0,\infty)\to\Re:=(-\infty,\infty)$ граничного теплового потока $b(x)u(t)$ по данным

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(x)T(x,1,t)dx \tag{12}$$

взвешенных (с весовой функцией $c:\Re\to\Re$) измерений температуры на поверхности $z=1$.

Система уравнений (10)–(12) описывает динамическую систему вида Σ, для которой $H=L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом в области Ω функций $f:\Omega\to\Re$, $\partial\Omega=L_2(\Re)$, $U=\Re$, $B=b(\cdot)$.

Предположим, что $b(\cdot)\in L_2(\Re)$, и для упрощения последующих формул будем считать, что норма функции $b(\cdot)$ в $L_2(\Re)$ равна единице. Тогда проектор P имеет вид

$$Pw=b(x)\int_{-\infty}^{\infty}b(s)w(s)ds\,. \tag{13}$$

Используя (13), после несложных вычислений получим Σ^{-1}

$$T_t=T_{xx}+T_{zz},\, T(x,z,0)=T_0(x,z), \tag{14}$$

$$T_z(x,0,t)=0\,, \tag{15}$$

$$T_z(x,1,t)-b(x)\int_{-\infty}^{\infty}b(s)T_z(s,1,t)ds=0,\ \int_{-\infty}^{\infty}c(x)T(s,1,t)ds=y(t), \tag{16}$$

$$u(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}b(s)T_z(s,1,t)ds\,. \tag{17}$$

Система уравнений (16), как нетрудно заметить, эквивалентна уравнению (аналог соотношения (9))

$$T_z(x,1,t)-b(x)\int_{-\infty}^{\infty}b(s)T_z(s,1,t)ds+b(x)\int_{-\infty}^{\infty}c(s)T(s,1,t)ds=b(x)y(t)\,. \tag{18}$$

Таким образом, обратная динамическая система Σ^{-1} представлена уравнениями (14), (15), (17), (18). Пусть функции $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ удовлетворяют естественным с физической точки зрения условиям $b(x)\geq 0$, $c(x)\geq 0$, $\forall x\in\Re$, тогда граничные условия (15), (18) попадают в класс граничных условий, указанных в работах [7, 8]. В этом случае полугруппа e^{Ft} относится к классу C_0 и, следовательно, решение обратной задачи допускает представление в форме (8).

1. Самарский А.А., Бабищевич П.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. математика и кибернетика. 1995. № 1. С. 47.

2. Борухов В.Т. // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47. № 3. С. 465.

3. Борухов В.Т. // Автоматика и телемеханика. 1982. № 5. С. 28.

4. Хилле А., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

5. Самарский А.А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925.

6. Тихонов А.Н. // Мат. сб. 1950. Т. 26 (86). № 1. С. 35.

7. Feller W. // Ann. of Math. 1952. Vol. 55. P. 468.

8. Вентцель А.Д. // Теория вероятностей и ее применения. 1959. Т. 4. Вып. 2. С. 172.

Поступила в редакцию 13.01 2000.