

где y_0 – некоторый n -вектор. Поэтому в случае разрешимости регулярной системы (1), (2) в силу (5) имеем [1]

$$\begin{aligned} x_0 &= Q((PAQ - \lambda_0 PA_0 Q)^{-1} PA_0 Q)^n Q^{-1} y_0 = \\ &= Q \left(\begin{bmatrix} (E_m - \lambda_0 H)^{-1} & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{bmatrix} \right)^n Q^{-1} y_0 = \\ &= Q \begin{bmatrix} (E_m - \lambda_0 H)^{-n} H^n & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-n} \end{bmatrix} Q^{-1} y_0. \end{aligned}$$

Учитывая, что из нильпотентности матрицы H следует $H^n = 0$, окончательно получим

$$x_0 = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-n} \end{bmatrix} Q^{-1} y_0.$$

Отсюда на основании (9) и определения обобщенной фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ регулярной системы (1) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(0)x_0 &= F(+0)x_0 = \left(Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{bmatrix} Q^{-1} \right) Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-n} \end{bmatrix} Q^{-1} y_0 = \\ &= Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (S - \lambda_0 E_{n-m})^{-n} \end{bmatrix} Q^{-1} y_0 = x_0, \end{aligned}$$

т. е. соотношение (11) выполнено.

Далее при выполнении (11) для функции (12), во-первых, справедливо равенство (2), и, во-вторых, из (10) следует (1), т. е. формула (12) дает требуемое представление решения регулярной системы (1), (2).

Следствие. Общее решение $x(t)$ регулярной системы (1) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t)X_0 c,$$

где c – соответствующий вектор произвольных постоянных, $\Phi(t)$ – обобщенная фундаментальная матрица рассматриваемой системы, а X_0 – фундаментальная матрица решений линейной алгебраической однородной системы относительно n -вектора x_0

$$(\Phi(0) - E_n)x_0 = 0.$$

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
2. Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. Курс дифференциальных уравнений. Мн., 1996.
3. Bulatov V.I. // ORAN-ALGERIE. 1988. Fascicule № 1.

Поступила в редакцию 20.10.99.

УДК 622.831; 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ, О.Б. ГРИЩЕНКОВА, М.А. КОВАЛЕВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛУОБРАТНОГО МЕТОДА СЕН-ВЕНАНА В ГЕОМЕХАНИКЕ

1. Теоретические основы и анализ систем разрешающих уравнений

There are described the theoretical bases of the solution of some classes of problems of applied geomechanics on the basis of use of the halfconverse Sen-Venan method main idea in the paper. Analysis of solution equations systems and influence of boundary conditions and accepted physical hypotheses on the final solutions is made.

Идея полуобратного метода Сен-Венана заключается в уменьшении числа неизвестных функций, подлежащих определению при решении задач теории упругости, путем задания некоторым из неизвестных функций определенных аналитических выражений. Если при этом оставшиеся функции (например, компоненты тензора напряжений, компоненты вектора смещений точек упругого тела) удастся определить так, что уравнения равновесия и граничные условия оказываются выполненными, то задача считается решенной, так как в силу известных теорем решение задачи теории упругости единственно [1].

К сожалению, при разработке методов решения большого круга задач геомеханики для получения удобных и используемых в прикладных исследованиях способов решения и подходов к ним приходится идти на некоторый компромисс. В большинстве случаев, например, не удастся в точности удовлетворить всем начальным условиям: на некотором участке поверхности, ограничивающей тело, распределение усилий оказывается отличным от заданного, на систему сил, статически эквивалентную нулю. Это обстоятельство, как правило, игнорируется, так как, согласно принципу Сен-Венана, напряжения, вызываемые системой сил, статически эквивалентной нулю и приложенной к небольшому участку поверхности тела, почти не меняют картины распределения напряжений вдали от этого участка.

В данной работе показывается, как можно использовать основную идею полуобратного метода Сен-Венана (основываясь на подходе, изложенном в [1]) для приближенного решения некоторых классов задач прикладной геомеханики.

Рассматривается механическое состояние твердой деформируемой среды, поведение которой описывается уравнениями равновесия относительно компонент перемещений в форме Ламе:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i = X_i, \quad (1)$$

где U_i – компоненты перемещений; X_i – компоненты массовых сил;

$\Theta = \sum_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$ – объемное расширение.

Пусть выбрана некоторая система функций $U_i = U_{1i}$ от переменных x_i , удовлетворяющая граничным условиям задачи. Подставляя эти функции в левые части уравнений Ламе (1), получим:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_i} + \mu \Delta U_{1i} = X_{1i}. \quad (2)$$

Объемные усилия X_{1i} , Y_{1i} , Z_{1i} в (2) определяются выбором функций $U = U_{1i}$.

Если окажется, что в точности $X = X_{1i}$, то функции U_{1i} представляют точное решение соответствующей задачи теории упругости. Если же этого нет, то система функций U_{1i} отвечает решению задачи теории упругости для тех же граничных условий на поверхности тела, но с новыми компонентами массовых сил X_{1i} .

Может случиться так, что полученные компоненты X_{1i} будут незначительно отличаться от заданных. В этом случае задача считается решенной приближенно и принимается $U \sim U_{1i}$.

Соответствие полуобратному методу Сен-Венана достигается, если подбираются, например исходя из физических условий, лишь некоторые из функций U_{1i} , а оставшиеся определяются из уравнения равновесия так, чтобы при соблюдении условий на границе массовые силы X_{1i} , возможно, ме-

нее отличались от заданных. При этом число уравнений равновесия сокращается соответственно числу определенных заранее функций компонент смещения.

Задача 1.

Геомеханическая формулировка задачи состоит в следующем:

Определить перемещения в породном массиве в зоне геологического нарушения (разлома) земной поверхности. Известны перемещения на границе полупространства (земной поверхности) как некоторые функции, зависящие от координат. На первом этапе предполагаем, что по граничным поверхностям нарушения выполняются условия полного сцепления с окружающим массивом.

Замечание. Данная геомеханическая задача может использоваться для моделирования деформационных процессов в зонах нарушений породной толщи, например, на земной поверхности в особых зонах проводятся натурные исследования по изучению процессов сдвижений земной поверхности. В результате выполнения модельных аналитических и численных расчетов определяются смещения по глубине массива от движения поверхности в зоне нарушения [2].

Введем некоторые предположения, а именно:

- считаем, что ширина разлома постоянна и равна $2a$,
- разлом симметричный относительно вертикальной оси x_2 ,
- разлом достаточно протяженный по оси x_3 , поэтому при изучении деформационных процессов в сечениях, удаленных от краевых зон в направлении оси x_3 , задачу можно решать в плоской постановке (т. е. рассматривать плоские сечения разлома).

В связи со сформулированными замечаниями в качестве базовых рассматриваются уравнения Ламе (1) в двумерном случае. Кроме того, так как изучаются перемещения, только возникающие вследствие собственно нарушения (разлома) в массиве (в абсолютной системе это относительные перемещения области с нарушением при рассмотрении общих движений породных масс), то массовые силы приравняем к нулю.

Замечание 1. Полные смещения земной поверхности в районе нарушения представляют в соответствии с такой формулировкой задачи композицию решения, получаемого при рассмотрении данной задачи, и общих смещений поверхности вследствие, например, ведения подземных горных работ.

Граничные условия задачи для относительных перемещений в области нарушения (вследствие допущения полного контакта с окружающим массивом) выписываются следующим образом:

$$x_1 = |a|, \rightarrow U = V = 0, x_2 = 0, \rightarrow U = f(x_1), V = g(x_1), x_2 = \infty, \rightarrow U = V = 0. \quad (3)$$

В выражении (3) f и g – известные функции.

В связи с введенным допущением о полном сцеплении пород по граничным контактными поверхностями является корректным допущение о малости относительных перемещений в горизонтальной плоскости, т. е. можно принять, что $U=0$.

В этом случае в правых частях уравнений Ламе (1) появляются массовые силы, так как деформированное состояние с перемещением $U=0$ можно поддержать только при наличии фиктивных массовых сил X_f, Y_f . В итоге с учетом всех указанных замечаний исходные уравнения имеют вид:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = X_f, \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = Y_f.$$

Замечание 2. Очевидно, что, имея в наличии лишь одну функцию V , нельзя удовлетворить точно обоим уравнениям системы (6). Если бы это было так, то приближенное решение $U=0$ оказалось бы точным.

Проинтегрировав уравнение Лапласа (6) способом разделения переменных и выполнив ряд определенных преобразований с учетом граничных условий исходной задачи, получаем выражение для функции V , которое принимает вид:

$$V = \frac{1}{a} \sum \Omega_n \exp\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right). \quad (5)$$

Здесь $\Omega_n = \int_0^a g(x_1) \cos\left(\frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right) dx_1$.

Не нарушая общности, примем, что фиктивная массовая сила Y_f равна нулю, и определим компоненту массовых сил X_f , исходя из первого уравнения системы (4). Дифференцируя уравнение (4) последовательно по x_1 и x_2 и выполнив очевидные математические преобразования, получаем следующее выражение для компоненты массовых сил X_f :

$$X_f = (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{a^3} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \Omega_n \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right). \quad (6)$$

Наличие множителя $(1/2)^n$ ухудшает сходимость ряда (6). Поэтому может случиться, что, несмотря на сходимость ряда (11) для функции V , ряд для X_f при равенстве нулю второй переменной ($U=0$) будет расходиться. Следовательно, решение при введенных допущениях существенным образом зависит от вида функции g .

Например, выполним проверку решения при кусочно-постоянном значении функции g : $g(x_1) = P$, $x_1 \in [x_1^i, x_1^{i+1}]$.

Выражение для функции V в этом случае имеет следующий вид:

$$V = \frac{2P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)} \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right). \quad (7)$$

Соответственно

$$X_f = (\lambda + \mu) \frac{2P\pi}{a^3} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n\right) (-1)^n \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n\right) x_1\right).$$

Анализируя формулу (7), можно показать, что ряд сходится абсолютно, следовательно, функция V имеет вполне определенное значение:

$$V \approx \frac{Pa\sqrt{\lambda + 2\mu}}{x_2 \pi^2 \sqrt{\mu}} \text{ при условии, что } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(1+2n)^2} \right| \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Аналогично показывается сходимость ряда для X_f .

Определим погрешность полученного решения. Подставив выражение для V из формулы (8) в исходные уравнения (4), получим, что первое уравнение системы (4) удовлетворяется тождественно, а относительно второго имеем:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = 0.$$

На основании (8):

$$-(\lambda + 2\mu) \frac{Pa\sqrt{\lambda + 2\mu}}{x_2^3 \pi^2 \sqrt{\mu}} = 0. \quad (9)$$

Выражение (9) будет выполнено при x_2 , стремящемся к бесконечности.

Таким образом, при введенных ограничениях и предположениях решение сформулированной задачи, построенное путем использования полуобратного метода Сен-Венана, имеет большую степень погрешности при малых значениях x_2 (на малых глубинах), уменьшающуюся с увеличением глубины.

Задача 2.

Геомеханическая формулировка данной задачи является развитием первой задачи и состоит в следующем:

Определить перемещения в породном массиве в зоне геологического нарушения (разлома) земной поверхности. Известны перемещения на границе (земной поверхности) как некоторые функции, зависящие от координат. Однако в отличие от первой задачи, граничные условия в зонах сопряжений разлома с массивом определяются по типу «упругой заделки».

В данном случае все предположения, введенные в предыдущей задаче, остаются в силе, исходные уравнения те же, но видоизменяются граничные условия. При рассмотрении задачи в такой постановке важную роль играют касательные напряжения, возникающие в краевых зонах.

Граничные условия для задачи в компонентах относительных перемещений записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1 = |a|, & \rightarrow U = 0, V = \alpha \tau_{12}, \\ x_2 = 0, & \rightarrow U = f(x_1), V = g(x_1), \\ x_2 = \infty, & \rightarrow U = V = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где α – коэффициент податливости заделки, τ_{12} – касательные напряжения.

Приняв, как и в первой задаче, перемещение $U=0$ и выполнив ряд преобразований, получим выражение для V , которое имеет вид:

$$V = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n \int_0^a g(x_1) \cos(k_n x_1) dx_1}{4a k_n + \sin(2a k_n)} \exp(-m_n x_2) \cos(k_n x_1). \quad (11)$$

Представление для X_f получаем, дифференцируя (11) по обеим координатам. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид представления для массовых сил X_f :

$$X_f = 4(\lambda + \mu) \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k_n)^3 \int_0^a g(x_1) \cos(k_n x_1) dx_1}{4a k_n + \sin(2a k_n)} \exp(-m_n x_2) \sin(k_n x_1).$$

Выражение для касательного напряжения, возникающего на краях заделки, принимает такой вид:

$$\tau_{12} = -4\alpha\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k_n)^2 \int_0^a g(x_1) \cos(k_n x_1) dx_1}{4a k_n + \sin(2a k_n)} \exp(-m_n x_2) \sin(k_n x_1). \quad (12)$$

Итак, получено решение задачи в общем виде: выписаны представления для компонент вертикальных перемещений V и компоненты фиктивной массовой силы X_f .

Проанализируем полученные результаты.

Исследуем касательные напряжения, возникающие в случае контактных граничных условий по схемам жесткой и упругой заделок.

Анализируя на основании (12) касательные напряжения, возникающие в случае жесткой заделки, получаем, что значения касательных напряжений на граничных поверхностях $x_1 = a$; $x_2 = 0$ обращаются в ноль.

В случае упругой заделки рассмотрим коэффициенты в разложении в ряд Фурье C_m :

$$C_m = \int_0^a g(a) \cos(k_n a) dx_1. \quad (13)$$

Согласно (13) коэффициенты в разложении Фурье зависят только от корней трансцендентного уравнения. При n , стремящемся к бесконечности, получаем, что:

$$k_n = \pi n; \quad C_m = \int_0^a g(a) \cos(\pi n a) dx_1.$$

Если принять, что a – целое, то:

$$C_m = \int_0^a g(a) (-1)^{an} dx_1 = a (-1)^{an} c, \quad (14)$$

где c – значение функции g в точке a (при $x_2=0$).

Далее:

$$\tau_{12} = -4\alpha\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n C_n \sin(k_n x_1)}{4a + \frac{\sin(2ak_n)}{k_n}}.$$

С учетом того, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(2xa)/x \rightarrow 0$, получаем:

$$\tau_{12} = \frac{-\alpha\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} k_n C_n \sin(k_n x_1). \quad (15)$$

Подставив значение C_m из формулы (14) в выражение (15), имеем:

$$\tau_{12} = \frac{-\alpha\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} k_n C_n \sin(k_n x_1) = \frac{-\alpha\mu}{a} \sum_{n=1}^{\infty} k_n (-1)^{na} \sin(k_n x_1). \quad (16)$$

Для реального существования и сходимости ряда (16) необходимо, чтобы синус не обращался в ноль, т. е. введенное предположение о целостности числа a верно лишь в приближении, возможном при бесконечном суммировании.

Максимальное значение касательное напряжение принимает в точке, где $k_n a = \pi/2$. В соответствии с этим:

$$\tau_{12} = \frac{-\alpha\mu c}{2a^2}.$$

Отметим, что при $\alpha=0$ получаем случай жесткой заделки.

Примечание к задачам 1 и 2.

Рассмотрим, как изменяется ход решения задач, если исключить некоторые из введенных допущений.

– Если ширина разлома непостоянна, то необходимо для каждой отдельной точки по всей глубине разлома определять и напряжение, и перемещение. В этом случае функции перемещений и напряжений будут иметь дискретный характер.

– Отсутствие симметрии задачи не влияет на ход вычислений, так как линейной заменой координат можно перенести систему координат в любое место полуплоскости.

– Плоский случай рассматривался только для того, чтобы дать схему решения, так как с учетом третьей координаты задача перешла бы в пространственный класс задач, что привело бы к усложнению процесса решения и появлению специальных функций Бесселя.

Задача 3.

Геомеханическая формулировка задачи состоит в следующем:

Определить поле перемещений в породном массиве при известных перемещениях земной поверхности.

Замечание 3. Данная геомеханическая задача может использоваться для моделирования и изучения влияния сдвижений земной поверхности на деформационные процессы в породной толще. В результате выполнения модельных расчетов определяются смещения по глубине массива.

Введем следующие предположения:

- Горизонтальные перемещения U_1 и U_2 являются функциями от вертикальных перемещений U_3 , т. е.

$$\begin{aligned} U_1 &= k(x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} U_3(x_1, x_2, x_3), \\ U_2 &= k(x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} U_3(x_1, x_2, x_3), \\ U_3 &= U_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (17)$$

где $k(x_3) = p^2 x_3$, p – некоторая постоянная.

- Массовые силы определяются следующим образом: $X=Y=0$, $Z=\rho g$.
- Граничные условия заданы в перемещениях, т. е.

$$U_i = F_i(x_1, x_2), \text{ при } x_3=0. \quad (18)$$

Замечание 4. Граничные условия в компонентах вектора поверхностных усилий или смешанного типа никаких принципиальных трудностей не вызывают.

Для решения сформулированной задачи, как и при рассмотрении предыдущих двух, используем основные уравнения равновесия теории упругости в компонентах перемещений – уравнения Ламе.

Подставив формулы (17) в исходные уравнения Ламе и выполнив ряд математических преобразований, получаем:

в случае плоского деформированного состояния функция оседаний $U_3(x_1, x_3)$ имеет следующее представление:

$$U_3(x_1, x_3) = \frac{\rho g x_1^2}{((\lambda + \mu) p^2 + \mu) 2} + U^{**} x_1 + U^*. \quad (19)$$

(U^* , U^{**} – определяются по граничным условиям.)

Проведем некоторый анализ решения (19). Подставив (19) в систему исходных уравнений и выполнив некоторые преобразования, имеем:

$$(\lambda + \mu) \frac{p^2 \rho g}{((\lambda + \mu) p^2 + \mu)} = 0. \quad (20)$$

Равенство (20) будет выполняться в случае, если значения λ , μ или p близки к нулю. Физически это соответствует случаю сыпучей среды.

В общем случае можно показать, что функция оседаний $U_3(x_1, x_2)$ является решением такого дифференциального уравнения:

$$(\Delta - k^2)U(x_1, x_2) = h, \quad (21)$$

где $k^2 = -n_2/n_1$, $h = d/n_2$.

Анализ уравнения типа (21), процедуры решения граничных задач для (21) методом интегральных уравнений описаны в [4, 5].

* * *

Подводя итог выполненных исследований, можно сделать следующий вывод.

Использование полуобратного метода Сен-Венана является корректным и перспективным при решении различных задач прикладной геомеханики. Данный подход относится к группе экспериментально-аналитических методов, при использовании которых можно добиться наиболее адекватного описания реального поведения геомеханических процессов. Описанный подход позволяет не только строить легкие в реализации системы разрешающих уравнений, но и выполнять исследования на корректность начальных (граничных) условий, принятых физических гипотез и допущений, а также собственно полученного решения.

В следующей части будет приведено решение конкретных задач применительно к месторождению калийных солей в Беларуси (г. Солигорск).

1. Ишлинский А. Ю. Применение полуобратного метода Сен-Венана к приближенному решению некоторых задач теории упругости // Прикладные задачи механики. М., 1975. Т. 2. С. 33.

2. Журавков М. А., Земсков А. Н., Смычник А. Д. Влияние природных и техногенных факторов на нестационарное состояние литосферы в районах геологических нарушений. Мн., 1997.

3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1987. Т. 1.

4. Мартыненко М. Д., Журавков М. А. Метод квазифункций Грина в механике деформируемого твердого тела. Мн., 1993.

5. Журавков М. А., Мартыненко М. Д. Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. Мн., 1995.

Поступила в редакцию 07.12.99.

УДК 517.958

В.Т. БОРУХОВ, В.И. КОРЗЮК

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

The method inversion of linear dynamical system is presented to study a number of inverse problem for reconstruction of boundary data in the abstract transfer equation. Example is presented.

Задачи восстановления граничных режимов процессов переноса возникают в различных разделах науки и техники и относятся к классу обратных задач математической физики [1]. Традиционный подход к таким задачам состоит в сведении их с помощью функции Грина прямой задачи к интегральным уравнениям Вольтерра 1-го рода.

В работах [2, 3] предложен другой подход, основанный на теории обратимости линейных динамических систем в пространстве состояний [3]. Обращение динамической системы связано с задачей восстановления неиз-