При $\alpha<0$, $\beta<0$ для разрешимости уравнения (1) *необходимо и достаточно выполнение совокупности условий* (7), (8). *При $\alpha>0$, $\beta<0$ разрешимость уравнения* (1) *равносильна совместности системы*

$$\sum_{m=1}^{\alpha} p_{lm} a_m = q_l, \quad l = 1, 2, \ldots, -\beta, \tag{9}$$

в которой

$$p_{lm} = \int_L \frac{\tau^{nm-1}(a(\tau)+b(\tau))X_+(\tau)d\tau}{Y_+(\tau)(\tau^n+1)^{\gamma+\alpha}},$$

$$q_l = \int_L \frac{\tau^{n-k-1}(f(\tau)-2(a(\tau)+b(\tau))X_+(\tau)E_+(\tau))d\tau}{2Y_+(\tau)(\tau^n+1)^{\gamma}}.$$

В последнем случае постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ являются общим решением системы (9). *В случае $\alpha>0$, $\beta\geq 0$ эти постоянные являются произвольными.*

1. Шилин А.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.

Поступила в редакцию 01.04.99.

УДК 517.926.4

З.Н. ПРИМИЧЕВА

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ КЛАССА КОНТИ – КОППЕЛЯ

The existence and uniqueness of a bounded solution is established for the differential system with a linear approximation of Conti – Coppel's class.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

где $A(t):[0,+\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ – непрерывная матрица.

Будем говорить, следуя Р. Конти [1], что система (1) принадлежит классу M^pS с числом $p\geq 1$, если для ее матрицы Коши $X(t,\tau)$ выполнено условие

$$\left(\int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \|^p d\tau\right)^{1/p} \leq k_p \equiv \mathrm{const} < +\infty, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Для $p=+\infty$ класс $M^\infty S$ совпадает с множеством линейных систем, удовлетворяющих следующему условию обыкновенной дихотомии

$$\| X(t,\tau) \| \leq k_\infty \equiv \mathrm{const} < +\infty, \quad \tau \geq t \geq 0. \tag{3}$$

Пусть функция $f(t,\tau)$, определенная и непрерывная на множестве $G = \{(t,y): t\geq 0, y\in R^n\}$, удовлетворяет в G следующим условиям

$$\| f(t,0) \| \in L_q(R_+), \quad q \geq 1, \tag{4}$$

$$\| f(t,y_1) - f(t,y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|. \tag{5}$$

Для $q=+\infty$ будем считать, что функциональное пространство $L_\infty(R_+)$ совпадает с пространством $C(R_+)$.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t, y). \tag{6}$$

Справедлива следующая

Теорема. Если система (1) принадлежит классу M^pS с числом $p \geq 1$, то для любой непрерывной в G вектор-функции $f(t, y)$, удовлетворяющей условию (4) с числом q, сопряженным с p, и неравенству Липшица (5) с достаточно малой постоянной L, система (6) имеет единственное ограниченное на R_+ решение.

Доказательство. Рассмотрим пространство $C(R_+)$ непрерывных и ограниченных на R_+ вектор-функций $y(t)$ с нормой $\|y\|_c = \sup\limits_{t \geq 0} \|y(t)\|$.

Следуя В. Коппелю [2, с. 36], определим в $C(R_+)$ отображение $T{:}y(t) \to$ $\to Ty(t)$, где

$$Ty(t) = -\int_t^{+\infty} X(t, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau. \tag{7}$$

Покажем, что функция $Ty(t)$ является непрерывной и ограниченной на R_+, и, следовательно, несобственный интеграл в (7) сходится.

Известно [4], что при любом $p > 0$ и любом $\varepsilon > 0$ справедливо условие $M^{p+\varepsilon}S \subset M^pS$, и поэтому при любом $p > 1$ имеет место включение

$$M^pS \subset M^1S. \tag{8}$$

В силу условия (4) справедлива оценка

$$\| f(t,0) \|_{L_q} \equiv h < +\infty, \quad t \geq 0. \tag{9}$$

Тогда

$$\| Ty(t) \| = \left\| \int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| = \left\| \int_t^{+\infty} X(t,\tau)[f(\tau, y(\tau)) - f(\tau,0) + f(\tau,0)] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \| \| f(\tau, y(\tau)) - f(\tau,0) \| d\tau + \int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \| \| f(\tau,0) \| d\tau.$$

Отсюда при $p > 1$ в силу неравенства Гельдера, условия Липшица (5), включения (8) и оценок (2), (9) следуют неравенства

$$\| Ty(t) \| \leq L \int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \| \| y(\tau) \| d\tau +$$

$$+ \left(\int_t^{+\infty} \|X(t,\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} \left(\int_t^{+\infty} \|f(\tau,0)\|^q d\tau \right)^{1/q} \leq Lk_1 \|y\|_C + k_p h.$$

Если $p = 1$, то оценка принимает вид

$$\| Ty(t) \| \leq Lk_1 \| y \|_C + k_1 \| f(t,0) \|_C.$$

Следовательно, функция $Ty(t)$ непрерывна и ограничена на R_+.

Покажем, что отображение T является сжимающим при условии, что постоянная Липшица удовлетворяет неравенству $L < 1/k_1$.

Действительно, в силу условия Липшица (5) и неравенства (2) справедлива оценка

$$\| Ty_1 - Ty_2 \| = \left\| \int_t^{+\infty} X(t,\tau)[f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq L \| y_1 - y_2 \|_C \int_t^{+\infty} \| X(t,\tau) \| d\tau \leq Lk_1 \|y_1 - y_2\|_C = \theta \|y_1 - y_2\|_C,$$

где $0 < \theta = Lk_1 < 1$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = Ty(t). \tag{10}$$

В силу принципа сжимающих отображений уравнение (10) имеет единственное ограниченное на R_+ решение.

Дифференцированием устанавливается [2, с. 36], что $y(t)$ является решением дифференциальной системы (6). Покажем, что эта система имеет единственное ограниченное на R_+ решение.

Действительно, если $y(t)$ – любое другое ограниченное на R_+ решение системы (6), то в силу установленных оценок по интегральной формуле Коши оно допускает представление

$$y(t) = X(t,0)x(0) - \int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau,$$

где интегральный член представления ограничен.

Учитывая, что первое слагаемое есть решение соответствующей однородной системы (1), которое является ограниченным тогда и только тогда, когда $x(0) = 0$, [3, с. 74], получаем требуемое.

Теорема доказана.

Следствие. Для ограниченного на R_+ решения интегрального уравнения (10) справедлива оценка

$$\| y(t) \| \le \frac{k_p h}{1 - Lk_1}.$$

Действительно, в силу принципа сжимающих отображений имеет место неравенство

$$\| y(t) \| \le \frac{\| Ty_0 \|}{1 - \theta},$$

где θ – коэффициент сжатия отображения T, $\theta = Lk_1$, $y_0 = 0$ и

$$Ty_0 = -\int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau, 0) d\tau.$$

Тогда в силу неравенств Гельдера, (2) и (9) имеем требуемую оценку

$$\|Ty_0\| = \left\| \int_t^{+\infty} X(t,\tau) f(\tau,0) d\tau \right\| \le \left(\int_t^{+\infty} \|X(t,\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} \left(\int_t^{+\infty} \|f(\tau,0)\|^q d\tau \right)^{1/q} \le k_p h.$$

Замечание. Если система (1) обладает обыкновенной дихотомией на R_+, то возмущенная система (6), удовлетворяющая условиям теоремы, не всегда имеет единственное ограниченное на R_+ решение.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{11}$$

Уравнение обладает обыкновенной дихотомией вида (3) на R_+. Однако

1) для любой функции $f \in L_1(R_+)$ любое решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

является ограниченным на R_+;

2) существует функция $f \in L_1[1, +\infty)$ такая, что уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon(\frac{1}{t}\sin\sqrt{t}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}\ln t)y+f(t),\quad t\geq 1, \tag{12}$$

не имеет ограниченных на $[1,+\infty)$ решений.

Покажем это. Уравнение (12) удовлетворяет условиям теоремы при достаточно малой положительной постоянной ε.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon(\frac{1}{t}\sin\sqrt{t}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}\ln t)y,\quad t\geq 1. \tag{13}$$

Матрица Коши уравнения (13) имеет вид $y(t,\tau)=\exp\{\varepsilon(\sin\sqrt{t}\ln t-\sin\sqrt{\tau}\ln\tau)\}$. Поэтому, полагая

1) $t_k=(\pi/2+2\pi k)^2, \tau_k=(2\pi k)^2: 1\leq\tau_k\leq t_k, \forall k\in N;$

2) $t_k=(2\pi k)^2, \tau_k=(3\pi/2+2\pi k)^2: 1\leq t_k\leq\tau_k, \forall k\in N,$

получаем, что $\|y(t_k,\tau_k)\|\to+\infty$ при $k\to+\infty$.

Следовательно, уравнение (13) не обладает обыкновенной дихотомией на $[1,+\infty)$.

Тогда из теоремы Коппеля [3, с. 131] следует, что существует функция $f\in L_1[1,+\infty)$ такая, что уравнение (12) не имеет ограниченных на $[1,+\infty)$ решений, ибо в противном случае уравнение (13) обладало бы обыкновенной дихотомией на $[1,+\infty)$.

1. Conti R. // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. Vol. 9. № 1. P. 23.
2. Coppel W. A. Dichotomies in stability theory. New York, 1978.
3. Coppel W. A. Stability and asymptotic behavior of differential equations. Boston, 1965.
4. Прохорова Р. А., Изобов Н. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1989. № 2. С. 39.

Поступила в редакцию 13.05.99.

УДК 517.926

В.И. БУЛАТОВ

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ ЛИНЕЙНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ

The criterion for existence of the solutions of linear, regular, homogeneous differential systems is proved. Analytic representation of these solutions is obtained with a use of generalized fundamental matrix of the systems as well.

Рассмотрим стационарную систему

$$A_0\dot{x}(t)=Ax(t), \tag{1}$$

не разрешенную относительно производной. Здесь x – n-вектор; A_0 и A – вещественные $n\times n$-матрицы.

Под решением системы (1), соответствующим начальному условию

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где x_0 – заданный n-вектор, будем подразумевать дифференцируемую n-вектор-функцию $x(t)$, $t\in[0;+\infty[$, удовлетворяющую (1), (2).

Систему (1) считаем регулярной, если найдется такое число λ_0, что

$$\det(\lambda_0 A_0-A)\neq 0. \tag{3}$$