

Лемма 6. Для оператора T и его сужений $T|X_1$ и $T|X_2$ справедливы следующие утверждения в терминах состояний операторов:

$$\begin{aligned} T \in \mathbf{I} &\Leftrightarrow T|X_1 \in \mathbf{I} \text{ и } T|X_2 \in \mathbf{I}, \quad T \in \mathbf{1} \Leftrightarrow T|X_1 \in \mathbf{1} \text{ и } T|X_2 \in \mathbf{1}, \\ T \in \mathbf{III} &\Leftrightarrow T|X_1 \in \mathbf{III} \text{ и } T|X_2 \in \mathbf{III}, \quad T \in \mathbf{3} \Leftrightarrow T|X_1 \in \mathbf{3} \text{ и } T|X_2 \in \mathbf{3}. \end{aligned}$$

Лемма 7. Пусть замкнутые подпространства X_1 и X_2 комплексного банахова пространства X приводят оператор T . Предположим, что L, M, N принимают значения из множества состояний $\{\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}\}$, а α, β, γ – из множества состояний $\{1, 2, 3\}$. Тогда если λ принадлежит резольвентным или спектральным подмножествам $L_\alpha(T|X_1) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)|X_1 \in L_\alpha\}$ и $M_\beta(T|X_2) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)|X_2 \in M_\beta\}$, то λ принадлежит резольвентному или спектральному подмножеству $N_\gamma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \in N_\gamma\}$, где $N := \max\{L, M\}$ и $\gamma := \max\{\alpha, \beta\}$.

Утверждение частично следует из леммы 6 (см. также [5]).

Теорема 5. Пусть замкнутые подпространства $X_1, X_2 \subset X$ комплексного банахова пространства X приводят оператор T . Тогда для спектра оператора $T = T|X_1 \oplus T|X_2$ имеем $\sigma(T) = \sigma(T|X_1) \cup \sigma(T|X_2)$ и, кроме того, выполняются спектральные равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &= \sigma_p(T|X_1) \cup \sigma_p(T|X_2), \quad \sigma_d(T) = \sigma_d(T|X_1) \cup \sigma_d(T|X_2), \\ \sigma_{ap}(T) &= \sigma_{ap}(T|X_1) \cup \sigma_{ap}(T|X_2), \quad \sigma_{ad}(T) = \sigma_{ad}(T|X_1) \cup \sigma_{ad}(T|X_2). \end{aligned}$$

Заметим, что, пользуясь леммой 7, можно получить различные соотношения для тонкой структуры спектра оператора T и его сужений на инвариантные подпространства.

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
2. Тейлор А. Е., Халберг Ч. Дж. А. // Математика: Сб. переводов. 1959. Т. 3. № 1. С. 69.
3. Taylor A. E. Introduction to functional analysis. New York, 1958.
4. Goldberg S. Unbounded linear operators. Theory and applications. New York, 1966.
5. Halberg Ch. Y. A., Samuelsson A. // Math. Scand. 1971. Vol. 29. № 1. P. 37.
6. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., 1970.
7. Davis C., Rosenthal P. // Canad. J. Math. 1974. Vol. 26. P. 1384.
8. Dowson H. R. Spectral theory of linear operators. London, 1978.
9. Caradus S. R., Pfaffenberger W. E., Yood B. Calkin algebras of operator on Banach spaces. New York, 1974.
10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Поступила в редакцию 21.05.2000.

УДК 517.968.23

А.П. ШИЛИН

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ УГЛА

Some new singular integral equation is solved in quadratures.

Пусть n – некоторое натуральное число, $n \geq 2$, k – одно из чисел $0, 1, \dots, n-1$, $\varepsilon_k = \exp(2\pi i k / n)$ – комплексные корни n -й степени из единицы.

На плоскости комплексной переменной z введем обозначение D_+ для угла, характеризующегося неравенствами $0 < \arg z < 2\pi / n$. Обозначим L – контур, ограничивающий D_+ и состоящий из лучей $L_s = \{t | t = \varepsilon_s x, x \geq 0\}$,

$s=0,1$. Выберем на контуре L ту ориентацию, которая оставляет угол D_+ слева. Будем обозначать D_- – внешность D_+ .

На контуре L зададим H -непрерывные функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $f(t)$. Будем искать H -непрерывную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению с интегралом в смысле главного значения

$$(a(t)+b(t))\varphi(t)+\frac{nt^k}{\pi i}\int_L\frac{\tau^{n-k-1}(a(\tau)-b(\tau))\varphi(\tau)d\tau}{\tau^n-t^n}+(M\varphi)(t)=f(t), t \in L, \quad (1)$$

где

$$(M\varphi)(t)=\begin{cases} \varepsilon_{n-k}(b(\varepsilon_1 t)-a(t))\varphi(\varepsilon_1 t), t \in L_0, \\ \varepsilon_k(b(\varepsilon_{n-1} t)-a(t))\varphi(\varepsilon_{n-1} t), t \in L_1 \end{cases}$$

(при $k=0$ ε_n здесь и дальше заменяется на ε_0). Все функции комплекснозначны.

H -непрерывность всех функций понимается вплоть до бесконечно удаленной точки. Отсюда вытекает, что каждая из них имеет на бесконечности конечный предел, не зависящий от луча L_0 или L_1 , по которому аргумент функции стремится к бесконечности. Этот предел обозначаем дальше как значение соответствующей функции на бесконечности. Будем предполагать еще, что $a(\infty) \neq 0$, $b(\infty) \neq 0$, $f(\infty) \neq 0$, а при $k \neq 0$ также $f(0)=0$. От искомой функции будем требовать $\varphi(\infty)=0$, а при $k \neq 0$ также $\varphi(0)=0$.

При $n=2$, $k=0$ уравнение (1) превращается в уравнение на действительной оси, решенное в [1].

Для $t \in L$ введем новые неизвестные функции $\Phi_+(t)=(P_+\varphi)(t)$, $\Phi_*(t)=(P_*\varphi)(t)$, $\Psi_+(t)=(P_+\psi)(t)$, $\Psi_*(t)=(P_*\psi)(t)$. При этом $\psi(t)=b(t)\varphi(t)$, а операторы P_+ , P_* задаются формулами

$$\begin{aligned} (P_+\varphi)(t) &= \frac{nt^k}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^{n-k-1}\varphi(\tau)d\tau}{\tau^n-t^n} + \frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2}(L\varphi)(t), \\ (P_*\varphi)(t) &= \frac{nt^k}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^{n-k-1}\varphi(\tau)d\tau}{\tau^n-t^n} - \frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2}(L\varphi)(t), \end{aligned}$$

где

$$(L\varphi)(t)=\begin{cases} \varepsilon_{n-k}\varphi(\varepsilon_1 t), t \in L_0, \\ \varepsilon_k\varphi(\varepsilon_{n-1} t), t \in L_1. \end{cases}$$

В выражениях для операторов P_+ , P_* мы берем то значение k , которое задано в уравнении (1); в частности, может быть $k=0$. Если же в этих выражениях взять $k=0$ независимо от заданного значения k , то такие операторы будем в дальнейшем обозначать соответственно P_+^0 , P_*^0 .

Теперь легко проверить, что уравнению (1) можно придать вид задачи линейного сопряжения

$$a(t)\Phi_+(t)=\Psi_*(t)+f(t)/2, t \in L. \quad (2)$$

Исключая из соотношений

$$\varphi(t)=\Phi_+(t)-\Phi_*(t), b(t)\varphi(t)=\Psi_+(t)-\Psi_*(t) \quad (3)$$

функцию $\varphi(t)$, придем еще к одной задаче линейного сопряжения

$$\Psi_+(t)=-b(t)\Phi_*(t)+((a(t)+b(t))\Phi_+(t)-f(t)/2), t \in L. \quad (4)$$

Выясним характер введенных функций $\Phi_+(t)$, $\Phi_*(t)$, $t \in L$. Согласно формулам Сохоцкого,

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} \text{ при } t \neq 0,$$

$$\Phi^+(0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varphi(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau}, \quad \Phi^-(0) = -\frac{1}{n} \varphi(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau}$$

есть предельные значения функций $\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}$, аналитических соответственно в $D_{\pm}$. (При $k \neq 0$ из-за условия $\varphi(0) = 0$ значения $\Phi^{\pm}(0)$ можно не выделять отдельно.) Рассмотрим функцию

$$\sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon_{j_s} \Phi^-(\varepsilon_s t), \quad (5)$$

где $j_0 = 0$, $j_1 = n - k$. Для $s = 2, 3, \dots, n-1$ положим $j_s = j_{s-1} - k$, если $j_{s-1} \geq k$, и $j_s = n + j_{s-1} - k$, если $j_{s-1} < k$; при этом нетрудно установить, что $j_{n-1} = k$.

Выражая слагаемые в (5) через интеграл по контуре L , функцию (5) преобразуем к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\sum_{s=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_{j_s}}{\tau - \varepsilon_s t} \right) \varphi(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \varphi(t) - \frac{1}{2} (L\varphi)(t) = \Phi_+(t),$$

причем последнее равенство устанавливается после вычисления возникшей суммы простых дробей. Выбором чисел j_s , $s = 0, 1, \dots, n-1$, мы добиваемся выполнения легко проверяемого свойства

$$\Phi_+(\varepsilon_1 t) = \varepsilon_k \Phi_+(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Совершенно аналогично получается равенство

$$\Phi^+(t) + \sum_{s=1}^{n-1} \varepsilon_{j_s} \Phi^-(\varepsilon_s t) = \Phi_+(t),$$

из которого понятно, что $\Phi_+(t)$ есть предельное значение на контуре L функции $\Phi^+(z) + \sum_{s=1}^{n-1} \varepsilon_{j_s} \Phi^-(\varepsilon_s z)$, аналитической, очевидно, в D_+ .

Итак, функция $\Phi_+(t)$ является предельным значением функции, аналитической в D_+ , а $\Phi_+(t)$ является функцией, заданной на контуре L и удовлетворяющей свойству (6). Очевидно, что обе функции H -непрерывны и исчезают на бесконечности. Вполне аналогичный характер имеют функции $\Psi_+(t)$ и $\Psi_-(t)$.

Теперь ясно, что возникшие задачи линейного сопряжения (2), (4) похожи на задачи Римана. Отличие от задач Римана состоит в том, что вместо аналитических в D_- функций ищутся функции на контуре L , обладающие свойством вида (6). Задачи (2), (4) допускают решение по схеме, аналогичной схеме Ф.Д. Гахова решения задачи Римана [2]. Отметим еще, что задачи (2), (4) можно свести также к задачам Карлемана для угла D_+ , однако в конструктивном отношении нам представляется более выгодным путь решения, основанный именно на аналогии с задачей Римана.

Укажем следующие несложные свойства аналитических функций. Если функция $\Phi(z)$ аналитична в D_+ , исчезает на бесконечности и имеет H -непрерывное предельное значение на L , причем при $t \geq 0$ $\Phi(\varepsilon_1 t) = \varepsilon_k \Phi(t)$, то $\Phi(z) = 0$. Если в дополнение к указанным свойствам функция $\Phi(z)$ допускает полюс порядка не выше ω в точке $z_0 = \exp(\pi i/n)$, то

$$\Phi(z) = \frac{c_1 z^k + c_2 z^{n+k} + \dots + c_\omega z^{(\omega-1)n+k}}{(z^n + 1)^\omega},$$

где $c_1, c_2, \dots, c_\omega$ – произвольные комплексные постоянные. Эти свойства при решении задач (2), (4) играют роль аналогов обычной и обобщенной теорем Лиувилля.

Операторы P_+, P_* позволяют решать задачи (2), (4) о скачке. Например, единственное решение задачи (2) о скачке $\Phi_+(t) - \Psi_*(t) = f(t)/2$ дается формулами $\Phi_+(t) = (P_+(f/2))(t)$, $\Psi_*(t) = (P_*(f/2))(t)$.

Дальнейшая аналогия решения задач (2), (4) с решением задачи Римана нам представляется достаточно очевидной, так что на соответствующих подробностях мы не останавливаемся. После введения некоторых обозначений сформулируем окончательный результат, получающийся последовательным решением задач (2), (4) и нахождением решения исходного уравнения по первой из формул (3).

Пусть $\alpha = -\text{Ind}_L a(t)$, $\beta = \text{Ind}_L b(t)$. Обозначим r – ранг линейной алгебраической системы (9), записанной впоследствии и возникающей при $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Считаем $r=0$, если неравенства $\alpha > 0$, $\beta < 0$ одновременно не выполняются. Под логарифмами понимаются однозначные непрерывные ветви.

Теорема. Решение уравнения (1) содержит $\max(0, \alpha) + \max(0, \beta) - r$ произвольных комплексных постоянных и находится по формуле

$$\varphi(t) = X_+(t)(E_+(t) + P(t)) - Y_*(t)(F_*(t) + Q(t)),$$

$$\text{где } X_+(t) = \left(\frac{t - z_0}{t + z_0} \right)^\alpha \exp((P_+^0 \Gamma)(t)), \quad \Gamma(t) = \ln \left(\left(\frac{t + z_0}{t - z_0} \right)^\alpha \frac{1}{a(t)} \right), \quad E_+(t) = (P_+ g)(t),$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{2a(t)X_+(t)}, \quad P(t) \equiv 0 \text{ при } \alpha \leq 0, \quad P(t) = \frac{a_1 t^k + a_2 t^{n+k} + \dots + a_\alpha t^{(\alpha-1)n+k}}{(t^n + 1)^\alpha} \text{ при } \alpha > 0, \quad a_1, a_2, \dots, a_\alpha - \text{комплексные постоянные},$$

$$Y_*(t) = \exp((P_*^0 \Delta)(t)), \quad \Delta(t) = \ln \left(\left(\frac{t + z_0}{t - z_0} \right)^\beta (-b(t)) \right), \quad F_*(t) = (P_* h)(t),$$

$$h(t) = \frac{(a(t) + b(t))X_+(t)(E_+(t) + P(t))}{Y_+(t)} - \frac{f(t)}{2Y_+(t)}, \quad Y_+(t) = \left(\frac{t - z_0}{t + z_0} \right)^\beta \exp((P_+^0 \Delta)(t)),$$

$$Q(t) \equiv 0 \text{ при } \beta \leq 0, \quad Q(t) = \frac{b_1 t^k + b_2 t^{n+k} + \dots + b_\beta t^{(\beta-1)n+k}}{(t^n + 1)^\beta} \text{ при } \beta > 0, \quad b_1, b_2, \dots,$$

b_β – произвольные комплексные постоянные.

При $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ уравнение (1) разрешимо безусловно. При $\alpha < 0, \beta \geq 0$ для его разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \frac{\tau^{n-k-l} g(\tau) d\tau}{(\tau^n + 1)^l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, -\alpha. \quad (7)$$

При $\alpha = 0, \beta < 0$ для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \frac{\tau^{n-k-l} h(\tau) d\tau}{(\tau^n + 1)^l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, -\beta. \quad (8)$$

При $\alpha < 0$, $\beta < 0$ для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение совокупности условий (7), (8). При $\alpha > 0$, $\beta < 0$ разрешимость уравнения (1) равносильна совместности системы

$$\sum_{m=1}^{\alpha} p_{lm} a_m = q_l, \quad l = 1, 2, \dots, -\beta, \quad (9)$$

в которой

$$p_{lm} = \int_L \frac{\tau^{nm-1} (a(\tau) + b(\tau)) X_+(\tau) d\tau}{Y_+(\tau) (\tau^n + 1)^{Y+\alpha}},$$

$$q_l = \int_L \frac{\tau^{n-k-1} (f(\tau) - 2(a(\tau) + b(\tau)) X_+(\tau) E_+(\tau)) d\tau}{2Y_+(\tau) (\tau^n + 1)^Y}.$$

В последнем случае постоянные $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$ являются общим решением системы (9). В случае $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ эти постоянные являются произвольными.

1. Шилин А. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2.

2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.

Поступила в редакцию 01.04.99.

УДК 517.926.4

З.Н. ПРИМИЧЕВА

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ КЛАССА КОНТИ – КОППЕЛЯ

The existence and uniqueness of a bounded solution is established for the differential system with a linear approximation of Conti – Coppel's class.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1)$$

где $A(t): [0, +\infty) \rightarrow \text{Hom}(R^n, R^n)$ – непрерывная матрица.

Будем говорить, следуя Р. Конти [1], что система (1) принадлежит классу $M^p S$ с числом $p \geq 1$, если для ее матрицы Коши $X(t, \tau)$ выполнено условие

$$\left(\int_t^{+\infty} \|X(t, \tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} \leq k_p \equiv \text{const} < +\infty, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Для $p = +\infty$ класс $M^\infty S$ совпадает с множеством линейных систем, удовлетворяющих следующему условию обыкновенной дихотомии

$$\|X(t, \tau)\| \leq k_\infty \equiv \text{const} < +\infty, \quad \tau \geq t \geq 0. \quad (3)$$

Пусть функция $f(t, \tau)$, определенная и непрерывная на множестве $G = \{(t, y): t \geq 0, y \in R^n\}$, удовлетворяет в G следующим условиям

$$\|f(t, 0)\| \in L_q(R_+), \quad q \geq 1, \quad (4)$$

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|. \quad (5)$$

Для $q = +\infty$ будем считать, что функциональное пространство $L_\infty(R_+)$ совпадает с пространством $C(R_+)$.

Рассмотрим возмущенную систему