УДК 517.984

В.А. ЕРОВЕНКО

О РАЗЛИЧНЫХ КЛАССИФИКАЦИЯХ ТОЧЕК СПЕКТРА ОГРАНИЧЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The aim of this paper is to indicate how states of linear operators in Banach space may be used for some relations between various classifications of subsets of the spectrum.

В математической литературе встречаются различные классификации точек и подмножеств спектра. Это связано с потребностями в спектральной теории, привлекаемой к решению соответствующих задач. Все эти классификации либо в том или ином смысле отражают различные свойства оператора, не имеющего ограниченного обратного на всем пространстве, либо связаны с определенными свойствами устойчивости подмножеств спектра, например при некоторых возмущениях, аналитических отображениях и т. д. Цель настоящей работы состоит в сравнении различных подходов к классификации точек спектра ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве и описание их спектральных свойств.

Пусть всюду в работе X – комплексное банахово пространство и T – ограниченный линейный оператор $T{:}X\to X$, $T\in \mathbf{B}(X)$. Нуль – пространство оператора T будем обозначать через $N(T):=\{x\in X{:}Tx=0\}$ и область значений через $R(T):=\{Tx{:}x\in X\}$. Тогда множества $\sigma_p(T):=\{\lambda\in \mathbf{C}{:}T-\lambda I$ не инъективен, т. е. $N(T-\lambda I)\neq\{0\}\}$, $\sigma_c(T):=\{\lambda\in \mathbf{C}{:}T-\lambda I$ инъективен, $\overline{R(T-\lambda I)}=X$, но $R(T-\lambda I)\neq X\}$, $\sigma_r(T):=\{\lambda\in \mathbf{C}{:}T-\lambda I$ инъективен, но $\overline{R(T-\lambda I)}\neq X\}$ называются соответственно *точечный спектр*, *непрерывный спектр* и *остаточный спектр*. Понятия непрерывного и остаточного спектров были впервые введены Н. Данфордом.

Разбиение спектра $\sigma(T)$ оператора T на подмножества $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$, согласно терминологии Н. Данфорда и Дж. Шварца, называют *грубой структурой спектра* [1, с. 620]. Другой, более детальный, подход в исследовании подмножеств спектра применен А.Е. Тейлором и Ч.Дж. Халбергом [2], используя понятия состояний оператора. Будем говорить, что оператор T имеет обратный T^{-1}, если из $Tx=0$ следует $x=0$, т. е. если T – взаимно однозначное отображение X на $R(T)$. Следуя работе [2], классифицируем различные возможности для $R(T)$ и T^{-1} следующим образом:

$$\mathbf{I}{:}\ R(T)=X,\quad \mathbf{II}{:}\ R(T)\neq X,\ \text{но}\ \overline{R(T)}=X,\quad \mathbf{III}{:}\ \overline{R(T)}\neq X,$$

1: $\exists\, T^{-1}$ и ограничен, **2**: $\exists\, T^{-1}$ и не ограничен, **3**: T^{-1} не существует.

Состоянием оператора T называется комбинация римских и арабских чисел этой классификации. Например, если $T\in\mathbf{I}$ и $T\in\mathbf{3}$, то это соответствует записи $T\in\mathbf{I}_3$, а $\mathbf{I}_3(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\in\mathbf{I}_3\}$. Вообще говоря, для пары операторов (T, T'), где T' – банаховый сопряженный a priori, возможно любое из 81 состояния. Однако из общих теорем следует, что, на самом деле, если пространство X – банахово, то число возможных состояний пар равно 9, а именно: $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_1)$, $(\mathbf{I}_3, \mathbf{III}_1)$, $(\mathbf{II}_2, \mathbf{II}_2)$, $(\mathbf{III}_1, \mathbf{I}_3)$, $(\mathbf{II}_3, \mathbf{III}_2)$, $(\mathbf{III}_2, \mathbf{II}_3)$, $(\mathbf{III}_3, \mathbf{III}_3)$ и $(\mathbf{II}_2, \mathbf{III}_2)$, $(\mathbf{III}_2, \mathbf{III}_3)$, кроме того, если пространство X – рефлексивное, то это число уменьшается до 7 без последних двух [2–4].

Резольвентное множество $\rho(T)$ оператора T есть подмножество $\mathbf{I}_1(T):=$ $=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\in\mathbf{I}_1\}$. Спектр $\sigma(T)$ содержит объединение шести спектральных подмножеств, описывающих *тонкую структуру спектра*, связанную с первичной классификацией точек спектра следующим образом: точечный спектр $\sigma_p(T)=\mathbf{I}_3(T)\cup\mathbf{II}_3(T)\cup\mathbf{III}_3(T)=\mathbf{3}(T)$, непрерывный спектр $\sigma_c(T)=\mathbf{II}_2(T)$, остаточный спектр $\sigma_r(T)=\mathbf{III}_1(T)\cup\mathbf{III}_2(T)$.

Определение 1. Подмножество спектра $\sigma_d(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ \overline{R(T-\lambda I)}\neq X\}=$ $=\mathbf{III}(T)$ называется *дефектным спектром* оператора T.

В частности, для остаточного спектра выполняется равенство $\sigma_r(T)=$ $=\sigma_d(T)\setminus\sigma_p(T)$. Следуя [5], обозначим через $\sigma_f(T)=\mathbf{II}_2(T)\cup\mathbf{II}_3(T)\cup\mathbf{III}_2(T)\cup$ $\cup\mathbf{III}_3(T)$ спектральное подмножество, которое называется *каркасом спектра*. Известно, что спектральные подмножества $\mathbf{I}_3(T)$ и $\mathbf{III}_1(T)$ являются открытыми множествами [5]. Кроме того, $\sigma_f(T)$ – непустое компактное подмножество спектра $\sigma(T)$, содержащее границу спектра, т. е. $\partial\sigma(T)\subseteq\sigma_f(T)$ или $\partial\sigma(T)\subseteq\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I\notin\mathbf{1}$ и $T-\lambda I\notin\mathbf{I}\}$.

В классификацию точек спектра, предложенную П. Халмошем [6, с. 45], входят точечный спектр σ_p, дефектный спектр σ_d (*спектр сжатия*) и аппроксимативно-точечный спектр $\sigma_{ap}(T)$ (*предельный спектр*).

Определение 2. Множество $\sigma_{ap}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}$: существует последовательность (x_n) такая, что $\|x_n\|=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|(T-\lambda I)x_n\|=0\}$ называется *аппроксимативно-точечным спектром* оператора T. Множество $\sigma_{ad}(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}:T-\lambda I$ – не сюръективен, т. е. $R(T-\lambda I)\neq X\}$ называется *аппроксимативно-дефектным спектром* оператора T [7].

Заметим, что $\lambda\notin\sigma_{ap}(T)$ тогда и только тогда, когда $\exists\ C>0$ такая, что $\|(T-\lambda I)x\|\geq C\|x\|$ для всех $x\in X$, т. е. оператор $T-\lambda I$ ограничен снизу, поэтому $\sigma_{ap}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:inf\{\|(T-\lambda I)x\|:\|x\|=1\}=0\}$.

В терминах состояний оператора аппроксимативные спектры $\sigma_{ap}(T)$ и $\sigma_{ad}(T)$ можно записать в виде:

$$\sigma_{ap}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\notin\mathbf{1}\}\text{ и }\sigma_{ad}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\notin\mathbf{I}\}.$$

Лемма 1. Для спектра оператора T справедливы равенства $\sigma(T)=\sigma_{ap}(T)\cup$ $\cup\sigma_d(T)$ и $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_{ad}(T)$, где пересечение множеств $\sigma_{ap}(T)\cap\sigma_d(T)$ и $\sigma_p(T)\cap\sigma_{ad}(T)$, вообще говоря, непусто.

Утверждение леммы можно непосредственно получить из представления этих спектров в виде спектральных подмножеств:

$$\sigma_d(T)=\mathbf{III}(T),\ \sigma_p(T)=\mathbf{3}(T),$$

$$\sigma_{ap}(T)=\mathbf{I}_3(T)\cup\mathbf{II}_2(T)\cup\mathbf{II}_3(T)\cup\mathbf{III}_2(T)\cup\mathbf{III}_3(T),$$

$$\sigma_{ad}(T)=\mathbf{II}_2(T)\cup\mathbf{II}_3(T)\cup\mathbf{III}_1(T)\cup\mathbf{III}_2(T)\cup\mathbf{III}_3(T).$$

Отметим, что из этих представлений непосредственно следуют равенства:

$$\sigma(T)=\sigma_{ap}(T)\cup\sigma_r(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_{ad}(T),\quad \sigma_p(T)=\sigma_{ap}(T)\setminus\{\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)\},$$

$$\sigma_c(T)=\sigma_{ap}(T)\backslash\{\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)\} \text{ и } \sigma_c(T)=\sigma_{ad}(T)\backslash\{\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)\}.$$

Лемма 2. Для аппроксимативных спектров оператора T и его банахово сопряженного T' верны соотношения: $\sigma_{ap}(T)=\sigma_{ad}(T')$ и $\sigma_{ap}(T')=\sigma_{ad}(T)$.

Теорема 1. Справедливы следующие равенства для спектра и включения для границы спектра оператора T:

$$\sigma(T)=\sigma_{ap}(T)\cup\sigma_{ad}(T)=\sigma_{ap}(T)\cup\sigma_{ap}(T')=\sigma_{ad}(T)\cup\sigma_{ad}(T'),$$

$$\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_{ap}(T)\cap\sigma_{ad}(T)=\sigma_{ap}(T)\cap\sigma_{ap}(T')=\sigma_{ad}(T)\cap\sigma_{ad}(T').$$

Кроме того, аппроксимативно-точечный спектр $\sigma_{ap}(T)$ и аппроксимативно-дефектный спектр $\sigma_{ad}(T)$ – непустые замкнутые подмножества спектра $\sigma(T)$ такие, что

$$\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_{ap}(T) \text{ и } \sigma_c(T)\cup\sigma_d(T)\cup\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_{ad}(T).$$

Замкнутость $\sigma_{ap}(T)$ следует из того, что если $\lambda_0\in\mathbf{C}\backslash\sigma_{ap}(T)$, то найдется $C>0$ такое, что $\|(T-\lambda_0 I)x\|\geq C$ для всех $x\in X$ таких, что $\|x\|=1$. Следовательно, если $\|x\|=1$ и $|\lambda-\lambda_0|<C/2$, то $\|Tx-\lambda x\|\geq\|Tx-\lambda_0 x\|-|\lambda_0-\lambda|\geq C/2$, так что $\lambda\in\mathbf{C}\backslash\sigma_{ap}(T)$. Из замкнутости $\sigma_{ap}(T)$ в силу соотношений двойственности (лемма 2) следует замкнутость аппроксимативного спектра. Непустота аппроксимативных спектров вытекает из включения $\partial\,\sigma(T)\subseteq\sigma_{ap}(T)\cap\sigma_{ad}(T)$.

Следствие 1. Если для граничной точки спектра $\lambda\in\partial\,\sigma(T)$ оператор $T-\lambda I$ инъективен, $N(T-\lambda I)=\{0\}$, то область значений $R(T-\lambda I)$ не замкнута.

Банахово пространство $\mathbf{B}(X)$ является также банаховой алгеброй с тождественным оператором I в качестве единицы, так как $\|AT\|\leq\|A\|\,\|T\|$ для $A,T\in\mathbf{B}(X)$ и $\|I\|=1$. Рассмотрим некоторые понятия для элементов банаховой алгебры и покажем, как в терминах алгебраических свойств можно охарактеризовать состояния линейных ограниченных операторов и, следовательно, соответствующие спектральные подмножества.

Определение 3. Оператор T называется *левым* (*правым*) *регулярным*, если найдется оператор A такой, что $AT=I$ ($TA=I$), а оператор A называется левым (правым) обратным оператора T. Множество всех левых (правых) регулярных элементов обозначается R_l (R_r). Оператор T называется *левым* (*правым*) *делителем нуля*, если найдется оператор $A\in\mathbf{B}(X)$, $A\neq0$, такой, что $TA=0$ ($AT=0$). Множество всех левых (правых) делителей нуля обозначается через D_l (соответственно D_r). Оператор T называется *левым* (*правым*) *топологическим делителем нуля*, если найдется последовательность операторов $(A_n)\subset\mathbf{B}(X)$ такая, что $\|A_n\|=1$ и $TA_n\to0$ ($A_nT\to0$), т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\|TA_n\|=0$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\|A_nT\|=0$). Множество всех левых (правых) топологических делителей нуля будем обозначать через $Z_l(Z_r)$.

Лемма 3. Оператор T – левый регулярный в $\mathbf{B}(X)$, $T\in R_l$, тогда и только тогда, когда $N(T)=0$ и $R(T)$ – дополняемое подпространство в X. Оператор T – правый регулярный в $\mathbf{B}(X)$, $T\in R_r$, тогда и только тогда, когда $R(T)=X$ и $N(T)$ – дополняемое подпространство в X.

Напомним, что подпространство X_1 банахова пространства X называют дополняемым, если X_1 замкнуто и найдется замкнутое подпространство X_2 такое, что X разлагается в прямую сумму $X=X_1\oplus X_2$, т. е. $X=X_1+X_2$ и $X_1\cap X_2=\{0\}$. Подпространство X_1 банахова пространства X дополняемо тогда и только тогда, когда существует оператор $P\in\mathbf{B}(X)$ такой, что $P^2=P$ и $R(P)=X_1$. В условиях леммы 3 $P=TA$ – проектор на $R(T)$, если $T\in R_l$, и $P=I-AT$ – проектор на $N(T)$, если $T\in R_r$.

Заметим, что $R_l\subseteq\mathbf{1}$ и $R_r\subseteq\mathbf{I}$. Действительно, если $AT=I$, то $x=ATx$ и $\|x\|\le\|A\|\,\|Tx\|$, а если $TA=I$, то тогда для любого $x\in X$ имеем $x=T(Ax)$, т. е. $R(T)=X$. Так как $T\in\mathbf{I}_1\Leftrightarrow T\in R_l\cap R_r$, то резольвентное множество $\rho(T)$ можно записать в следующем виде: $\rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}{:}\,T-\lambda I\in R_l\cap R_r\}$.

В частности, для ограниченных операторов в гильбертовом пространстве для множества регулярных элементов $R_l=\mathbf{1}$ и $R_r=\mathbf{I}$.

Лемма 4. Оператор T – левый (правый) делитель нуля в $\mathbf{B}(X)$, $T\in D_l(D_r)$, тогда и только тогда, когда T – не взаимно однозначное отображение (область значений $R(T)$ не плотна в X), т. е. $D_l=\mathbf{3}$ ($D_r=\mathbf{III}$). Оператор T – левый (правый) топологический делитель нуля в $\mathbf{B}(X)$, $T\in Z_l(Z_r)$, тогда и только тогда, когда T не ограничен снизу (не сюръективен), т. е. для операторов, не принадлежащих классу $Z_l(Z_r)$, которые обозначим через $CZ_l(CZ_r)$, имеем: $CZ_l=\mathbf{1}(CZ_r=\mathbf{I})$.

Доказательство утверждений лемм 3 и 4 содержится в монографиях [4, 9]. Нетрудно видеть, что из этих лемм следуют включения для элементов банаховой алгебры $\mathbf{B}(X)$ следующего вида: $D_l\subset Z_l\subset CR_l$ и $D_r\subset Z_r\subset CR_r$.

Теорема 2. Для спектра оператора T как элемента банаховой алгебры $\mathbf{B}(X)$ выполняется равенство: $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}{:}\,T-\lambda I\in Z_l\cup Z_r\}$. А для точечного и дефектного спектров, а также их аппроксимативных аналогов справедливы равенства:

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in D_l\},\quad \sigma_d(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in D_r\},$$
$$\sigma_{ap}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in Z_l\},\quad \sigma_{ad}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in Z_r\}.$$

Заметим, что для состояний ограниченных линейных операторов в банаховой алгебре $\mathbf{B}(X)$ справедливы равенства вида:

$$\mathbf{I}_1=R_l\cap R_r=C(Z_l\cup Z_r),\quad \mathbf{I}_2\text{ – невозможно},\quad \mathbf{I}_3=D_l\cap CZ_r,$$
$$\mathbf{II}_1\text{ – невозможно},\quad \mathbf{II}_2=Z_l\cap Z_r\cap C(D_l\cup D_r),\quad \mathbf{II}_3=D_l\cap Z_r\cap CD_r,$$
$$\mathbf{III}_1=D_r\cap CZ_l,\quad \mathbf{III}_2=D_r\cap Z_l\cap CD_l,\quad \mathbf{III}_3=D_l\cap D_r.$$

Отметим, в частности, что для состояний оператора $\mathbf{2}$ и $\mathbf{II}$ справедливы также равенства: $\mathbf{2}=Z_l\cap CD_l$ и $\mathbf{II}=Z_r\cap CD_r$.

Лемма 5. Для состояний ограниченных линейных операторов из $\mathbf{B}(H)$, где H – гильбертово пространство, выполняются равенства: $\mathbf{I}_3=D_l\cap R_r$ и $\mathbf{III}_1=D_r\cap R_l$. В частности, оператор $T\in\mathbf{B}(H)$ – левый (правый) регулярный тогда и только тогда, когда T не является левым (правым) топологическим делителем нуля в $\mathbf{B}(H)$, т. е. $R_l=CZ_l=\mathbf{1}$ и $R_r=CZ_r=\mathbf{I}$.

Заметим, что для операторов, определенных на банаховом пространстве X, выполняется равенство $D_r\cap R_l=\{T\in\mathbf{B}(X){:}\ T\in\mathbf{III}_1$ и T^{-1} может быть непрерывно продолжен на все $X\}$. Поэтому для операторов T, определенных на гильбертовом пространстве H, выполняется соотношение $\mathbf{III}_1=D_r\cap R_l$. Пользуясь диаграммой состояний Тейлора – Халберга [2] и свойством сопряженного от произведения ограниченных операторов $(AT)^*=T^*A^*$, из предыдущего равенства находим, что $\mathbf{I}_3=D_l\cap R_r$.

Следствие 2. Пусть $T\in\mathbf{B}(H)$, где H – комплексное гильбертово пространство. Тогда для аппроксимативных спектров справедливы равенства:

$$\sigma_{ap}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in CR_l\},\quad \sigma_{ad}(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in CR_r\}.$$

Заметим также, что множества R_l и R_r открыты, а множества Z_l и Z_r замкнуты в банаховой алгебре $\mathbf{B}(X)$, кроме того, для точечного $\sigma_p(T)$, остаточного $\sigma_r(T)$ и непрерывного $\sigma_c(T)$ спектров оператора T выполняются равенства:

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in D_l\},\ \sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ T-\lambda I\in D_r\backslash D_l\},$$

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}: T-\lambda I\notin D_l\cup D_r,\ T-\lambda I\in Z_l\cup Z_r\}.$$

Обозначим через $\mathbf{A}(T)$ семейство всех функций комплексной переменной, кусочно-аналитических на спектре $\sigma(T)$ оператора $T\in\mathbf{B}(X)$. По поводу *функционального исчисления* Рисса – Данфорда для ограниченных линейных операторов на комплексном банаховом пространстве X, $T\in\mathbf{B}(X)$, устанавливаемого с помощью соответствия $f\leftrightarrow f(T)$, которое осуществляет алгебраический изоморфизм между алгеброй $\mathbf{A}(T)$ и некоторой коммутативной алгеброй операторов, содержащихся в $\mathbf{B}(X)$, см.[1, с. 608–610]. Н. Данфорд [3] доказал теорему об отображении спектра, т. е. равенство для спектра функции от ограниченного оператора $f(T)$, где $f\in\mathbf{A}(T)$, а именно, что $\sigma(f(T))=f(\sigma(T))$, где $f(\sigma(T)):=\{f(\lambda): \lambda\in\sigma(T)\}$.

При отображениях, осуществляемых аналитическими функциями класса $\mathbf{A}(T)$, сохраняются и более тонкие структурные свойства спектра оператора T. В функциональном исчислении Рисса – Данфорда непересекающиеся части спектра $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$, вообще говоря, не отображаются в соответствующие части спектра оператора $f(T)$. Однако такое отображение может перевести некоторые подмножества спектра в такие же подмножества, если рассмотреть другое разбиение спектра, а именно на подмножества $\sigma_p(T)$, $\sigma_d(T)$, $\sigma_{ap}(T)$ и $\sigma_{ad}(T)$ (для первых трех спектров см. соответствующее утверждение в [10]).

Теорема 3. Пусть $f\in\mathbf{A}(T)$. Тогда справедливы включения:

$$f(\sigma_p(T))\subseteq\sigma_p(f(T)),\ f(\sigma_d(T))\subseteq\sigma_d(f(T)),\ f(\sigma_{ap}(T))\subseteq\sigma_{ap}(f(T)),\ f(\sigma_{ad}(T))\subseteq\sigma_{ad}(f(T)).$$

Если $\mu\in\sigma_p(f(T))$ (соответственно $\sigma_d(f(T))$, $\sigma_{ap}(f(T))$, $\sigma_{ad}(f(T))$) и $f(\lambda)\neq\mu$ ни на одной компоненте спектра $\sigma(T)$, то существует $\alpha\in\sigma(T)$ такое, что $f(\alpha)=\mu$ и $\alpha\in\sigma_p(T)$ (соответственно $\sigma_d(T)$, $\sigma_{ap}(T)$, $\sigma_{ad}(T)$), т. е. в этом случае верны обратные включения.

Дополнительное условие на функцию $f\in\mathbf{A}(T)$ из второй половины теоремы 3 существенно. Например, пусть $X=l^p$, $1\leq p\leq\infty$, и $T:=S_p$ – оператор одностороннего правого сдвига, т. е. $S_p(x_1, x_2, x_3,\ldots)=(0, x_1, x_2, x_3,\ldots)$. Тогда $\sigma_p(T)=\varnothing$, однако для $f(\lambda)=0$ имеем $\sigma_p(f(T))=\{0\}\neq\varnothing$.

Следствие 3. Если f – рациональная функция с полюсами вне спектра $\sigma(T)$ или $f\in\mathbf{A}(T)$ и непостоянна ни на одной из компонент множества $\sigma(T)$, то тогда справедливы равенства:

$$f(\sigma_p(T))=\sigma_p(f(T)),\ f(\sigma_d(T))=\sigma_d(f(T)),\ f(\sigma_{ap}(T))=\sigma_{ap}(f(T)),\ f(\sigma_{ad}(T))=\sigma_{ad}(f(T)).$$

Рассмотрим некоторые свойства подмножеств спектра расширения ограниченного линейного оператора T, определенного на подпространстве $D(T)$ банахова пространства X (см. также [10]). Пусть $T:D(T)\to X$ и $\tilde{T}:D(\tilde{T})\to X$ – линейные операторы в X. Оператор $\tilde{T}$ называется *расширением* оператора T, если $D(T)\subset D(\tilde{T})$ и $\tilde{T}x=Tx$ для $x\in D(T)$.

Теорема 4. Если ограниченный оператор $\tilde{T}$ – расширение ограниченного оператора T, $T\subset\tilde{T}$, то для их резольвентных множеств справедливо соотношение $\rho(\tilde{T})\subseteq\rho(T)\cup\sigma_r(T)$, а для подмножеств спектра операторов T и $\tilde{T}$ выполняются включения:

$$\sigma_p(T)\subseteq\sigma_p(\tilde{T}),\ \sigma_c(T)\subseteq\sigma_c(\tilde{T})\cup\sigma_p(\tilde{T}),\ \sigma_r(\tilde{T})\subseteq\sigma_r(T),$$
$$\sigma_d(\tilde{T})\subseteq\sigma_d(T),\ \sigma_{ap}(T)\subseteq\sigma_{ap}(\tilde{T}),\ \sigma_{ad}(\tilde{T})\subseteq\sigma_{ad}(T).$$

Говорят, что замкнутые подпространства X_1, $X_2\subset X$ приводят оператор T, если $X=X_1\oplus X_2$ (т. е. $X=X_1+X_2$ и $X_1\cap X_2=\{0\}$) и X_1, X_2 инвариантны относительно T. Тогда оператор T разлагается в прямую сумму $T=T|X_1\oplus T|X_2$.

Лемма 6. Для оператора T и его сужений $T|X_1$ и $T|X_2$ справедливы следующие утверждения в терминах состояний операторов:

$$T\in \mathbf{I} \Leftrightarrow T|X_1\in \mathbf{I} \text{ и } T|X_2\in \mathbf{I},\quad T\in \mathbf{1} \Leftrightarrow T|X_1\in \mathbf{1} \text{ и } T|X_2\in \mathbf{1},$$
$$T\in \mathbf{III} \Leftrightarrow T|X_1\in \mathbf{III} \text{ и } T|X_2\in \mathbf{III},\quad T\in \mathbf{3} \Leftrightarrow T|X_1\in \mathbf{3} \text{ и } T|X_2\in \mathbf{3}.$$

Лемма 7. Пусть замкнутые подпространства X_1 и X_2 комплексного банахова пространства X приводят оператор T. Предположим, что L, M, N принимают значения из множества состояний $\{$I, II, III$\}$, а α, β, γ – из множества состояний $\{1, 2, 3\}$. Тогда если λ принадлежит резольвентным или спектральным подмножествам $L_\alpha(T|X_1):=\{\lambda\in \mathbf{C}:\ (T-\lambda I)|X_1\in L_\alpha\}$ и $M_\beta(T|X_2):=\{\lambda\in \mathbf{C}:\ (T-\lambda I)|X_2\in M_\beta\}$, то λ принадлежит резольвентному или спектральному подмножеству $N_\gamma(T):=\{\lambda\in \mathbf{C}:\ T-\lambda I\in N_\gamma\}$, где $N:=\max\{L,M\}$ и $\gamma:=\max\{\alpha, \beta\}$.

Утверждение частично следует из леммы 6 (см. также [5]).

Теорема 5. Пусть замкнутые подпространства X_1, $X_2\subset X$ комплексного банахова пространства X приводят оператор T. Тогда для спектра оператора $T=T|X_1\oplus T|X_2$ имеем $\sigma(T)=\sigma(T|X_1)\cup\sigma(T|X_2)$ и, кроме того, выполняются спектральные равенства:

$$\sigma_p(T)=\sigma_p(T|X_1)\cup\sigma_p(T|X_2),\quad \sigma_d(T)=\sigma_d(T|X_1)\cup\sigma_d(T|X_2),$$
$$\sigma_{ap}(T)=\sigma_{ap}(T|X_1)\cup\sigma_{ap}(T|X_2),\quad \sigma_{ad}(T)=\sigma_{ad}(T|X_1)\cup\sigma_{ad}(T|X_2).$$

Заметим, что, пользуясь леммой 7, можно получить различные соотношения для тонкой структуры спектра оператора T и его сужений на инвариантные подпространства.

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
2. Тейлор А.Е., Халберг Ч.Дж.А. // Математика: Сб. переводов. 1959. Т. 3. № 1. С. 69.
3. Taylor A.E. Introduction to functional analysis. New York, 1958.
4. Goldberg S. Unbounded linear operators. Theory and applications. New York, 1966.
5. Halberg Ch.Y.A., Samuelsson A. // Math. Scand. 1971. Vol. 29. № 1. P. 37.
6. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., 1970.
7. Davis C., Rosenthal P. // Canad. J. Math. 1974. Vol. 26. P. 1384.
8. Dowson H.R. Spectral theory of linear operators. London, 1978.
9. Caradus S.R., Pfaffenberger W.E., Yood B. Calkin algebras of operator on Banach spaces. New York, 1974.
10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Поступила в редакцию 21.05.2000.

УДК 517.968.23

А.П. ШИЛИН

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ УГЛА

Some new singular integral equation is solved in quadratures.

Пусть n – некоторое натуральное число, $n\geq 2$, k – одно из чисел 0, 1, …, $n-1$, $\varepsilon_k=\exp(2\pi ik/n)$ – комплексные корни n-й степени из единицы.

На плоскости комплексной переменной z введем обозначение D_+ для угла, характеризующегося неравенствами $0<\arg z<2\pi/n$. Обозначим L – контур, ограничивающий D_+ и состоящий из лучей $L_S=\{t\mid t=\varepsilon_s x,\ x\geq 0\}$,