

Следствие 4. Пусть n -арная группа G является прямым произведением некоторого числа простых n -арных групп. Тогда $\Phi(\text{form } G) = (1)$ – класс одноэлементных n -арных групп.

Дадим теперь общую характеристику для τ -подформаций Фраттини.

Пусть $\mathcal{F}$ – τ -замкнутая формация n -арных групп, $G \in \mathcal{F}$. Будем говорить, следуя [3], что G является τ -необразующей для $\mathcal{F}$ n -арной группой, если всегда из $\mathcal{F} = \tau\text{form}(\mathcal{H} \cup \{G\})$ следует, что $\mathcal{F} = \tau\text{form}\mathcal{H}$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F} \neq (1)$ – непустая τ -замкнутая формация n -арных групп. Тогда $\Phi_{\tau}(\mathcal{F})$ состоит из всех τ -необразующих для $\mathcal{F}$ n -арных групп.

Следствие 5 (Скиба [3], Херцфельд [5]). Пусть $\mathcal{F}$ – формация групп. Тогда ее подформация Фраттини $\Phi(\mathcal{F})$ состоит из всех необразующих для $\mathcal{F}$ групп.

Следствие 6 (Скиба [3]). Пусть $\mathcal{F}$ – τ -замкнутая формация. Тогда $\Phi_{\tau}(\mathcal{F})$ состоит из всех τ -необразующих для $\mathcal{F}$ групп.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F} \neq (1)$ – непустая τ -замкнутая формация n -арных групп. Тогда если $\mathcal{M}$ – τ -замкнутая подформация формации $\mathcal{F}$, то $\Phi_{\tau}(\mathcal{M}) \subseteq \Phi_{\tau}(\mathcal{F})$.

Следствие 7 (Скиба [3]). Пусть $\mathcal{F} \neq (1)$ – τ -замкнутая формация. Тогда если $\mathcal{M}$ – τ -замкнутая подформация формации $\mathcal{F}$, то $\Phi_{\tau}(\mathcal{M}) \subseteq \Phi_{\tau}(\mathcal{F})$.

Отметим, что при доказательстве теорем 2, 3 мы использовали тот установленный нами факт, что решетка всех τ -замкнутых формаций n -арных групп модулярна.

1. Русаков С. А. Алгебраические n -арные системы. Мн., 1992.
2. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
3. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Мн., 1997.
4. Kovacs L. C., Newman M. F // Proc. Cambridge Phil. Soc. 64(1966). P.347.
5. Herzfeld U. C. // Boll. Un. Mat. Ital. B(7). 1988. P.601.
6. Скиба А. Н. // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. №12. С.1073.

Поступила в редакцию 30.09.99.

УДК 591.8

В.М.КОТОВ

ОДНА ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

We consider the parallel machine scheduling problem with release and delivery time. For this problem we present a greedy algorithm which complexity is $O(n \cdot \log n)$ and worst-case performance is 2.

Пусть имеется m одинаковых станков, на которых необходимо обработать n деталей. Для каждой детали i ($i=1, \dots, n$) определены три параметра:

$r(i)$ – время задержки,

$p(i)$ – время обработки детали на станке,

$d(i)$ – время доставки детали на склад после обработки.

Здесь $r(i)$ означает самый ранний момент времени, когда может быть начата обработка детали i на станке. При этом станок не может обрабатывать несколько деталей одновременно. Задача состоит в определении такой последовательности обработки, при которой все детали окажутся на складе через минимальное время.

Известно, что рассматриваемая задача является NP -трудной [1] даже в случае, когда время доставки равно нулю, а количество станков больше 1.

Поэтому определенный интерес представляет разработка эффективного приближенного алгоритма решения поставленной задачи. Так, в работе [2] был предложен алгоритм градиентного типа для случая, когда все значения $r(i)$ равны нулю, и доказано, что гарантированная оценка предложенного алгоритма равна $2-1/m$. Им также была поставлена проблема разработки алгоритма с произвольными значениями $r(i)$.

Для описания алгоритма введем следующие обозначения. Через T^* будем обозначать значение оптимального решения задачи, т.е. минимальное время, через которое все детали будут обработаны и доставлены на склад. Через $T(A)$ обозначим значение решения, построенного алгоритмом A .

Далее будет предложен алгоритм A градиентного типа и установлено, что для величин T^* и $T(A)$ справедливо соотношение $T(A) < 2 \cdot T^*$.

Не умаляя общности, будем считать, что $r(i) \leq r(i+1)$ для $i=1, \dots, n-1$. Действительно, этого можно добиться, отсортировав детали соответствующим образом за время, пропорциональное величине $n \cdot \log_2 n$.

Пусть $S(k) = (p(1) + \dots + p(k))/m$, $k=1, \dots, n$, а $L(k) = \max\{r(i) + p(i) + d(i), S(k)\}$, где максимум берется по всем значениям $i=1, \dots, k$.

Для определенных нами величин очевидны следующие утверждения.

Утверждение 1. $L(k) < T^*$, $k=1, \dots, n$.

Утверждение 2. $L(k) \leq L(k+1)$, $k=1, \dots, n$.

Через $H(k)$ обозначим общее время простоя всех станков после распределения k деталей на станки по алгоритму A . Эти простои связаны с наличием величины $r(i)$.

Через $Sph(j, k)$ будем обозначать общее время простоя и работы станка j , $j=1, \dots, m$, после k -го шага алгоритма, а через $SA(j, k)$ – максимальное время доставки деталей, обработанных на станке j .

Опишем шаг алгоритма $(k+1)$, т.е. правило выбора станка, на который очередная $(k+1)$ деталь будет назначаться. Для этого шага справедливы следующие утверждения.

Утверждение 3. Существует станок с номером x , для которого справедливо соотношение $Sph(x, k) \leq S(k) + H(k)/m$, что следует из равенства $Sph(1, k) + \dots + Sph(m, k) = m \cdot S(k) + H(k)$.

Утверждение 4. $r(k+1) \geq H(k)/m$.

Справедливость этого соотношения следует из упорядоченности величин $r(k)$.

Из приведенных выше утверждений вытекает

Следствие 1. $p(k+1) + d(k+1) \leq L(k+1) - H(k)/m$.

Доказательство следует из соотношения $r(k+1) + p(k+1) + d(k+1) \leq L(k+1)$ и утверждения 4.

Лемма 1. Если для обработки детали $k+1$ выбран станок x , для которого справедливы соотношения $Sph(x, k) \leq S(k) + H(k)/m$ и $SA(x, k) < 2 \cdot L(k)$, то для величины $SA(x, k+1)$ будет справедливо соотношение $SA(x, k+1) < 2 \cdot L(k+1)$.

Доказательство. Возможны три ситуации.

1. Максимальное время доставки деталей, обработанных на станке x после добавления новой детали, не увеличивается. В этом случае очевидно соотношение $SA(x, k+1) = SA(x, k)$.

2. Максимальное время доставки деталей, обработанных на станке x после добавления новой детали, увеличивается, но при этом не возникает нового интервала простоя, т.е.

$$Sph(x, k) \geq r(k+1) \text{ и } SA(x, k) < Sph(x, k) + p(k+1) + d(k+1).$$

В этом случае $SA(x, k+1) = Sph(x, k) + p(k+1) + d(k+1)$.

3. Максимальное время доставки деталей, обработанных на станке x после добавления новой детали, увеличивается и при этом возникает новый интервал простоя, т.е. $Sph(x, k) < r(k+1)$ и $SA(x, k) < r(k+1) + p(k+1) + d(k+1)$.

В этом случае $SA(x, k+1) = r(k+1) + p(k+1) + d(k+1)$. Отсюда, в силу утверждений, вытекает, что $SA(x, k+1) < \max\{SA(p, k), S(k) + H(k)/m + L(k+1) - H(k)/m, r(k+1) + p(k+1) + d(k+1)\} \leq \max\{2 \cdot L(k), S(k) + L(k+1), L(k+1)\} \leq 2 \cdot L(k+1)$.

Лемма доказана.

Алгоритм А.

1. Сортируем детали в порядке неубывания величин $r(i)$, $i=1, \dots, n$.
2. Помещаем в приоритетную очередь величины $Sph(j, k)$, $j=1, \dots, m$. Вначале все они равны нулю.

3. Итерация $k+1$, $k=0, \dots, n-1$.

А. Достаем из приоритетной очереди элемент x с минимальным значением $Sph(i, k)$ $j=1, \dots, m$;

Б. Назначаем на соответствующий станок текущую деталь и помещаем в приоритетную очередь величину $Sph(x, k+1)$.

4. Алгоритм заканчивает работу, когда все детали назначены на станки.

Трудоёмкость приведенного алгоритма пропорциональна величине $n \cdot \log_2 n$, так как трудоёмкость операций добавления в приоритетную очередь и удаления элемента из приоритетной очереди пропорциональна логарифму от количества элементов в очереди. Не умаляя общности, можно считать, что количество деталей превышает количество станков. В противном случае задача тривиальна.

Теорема. Для алгоритма А справедлива оценка $T(A) \leq 2 \cdot T^*$.

Доказательство следует из леммы при $k=n$ и утверждения 1.

Следствием теоремы является тот факт, что в случае, когда все значения $r(i)$, $i=1, \dots, m$, равны между собой, (например $r(i)=0$, [2]), то on-line алгоритм имеет гарантированную оценку, равную 2.

1. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco, 1979.

2. Woeginger G.. Heuristics for Parallel Machine Scheduling with Delivery Time. Graz 1996. Preprint.

УДК 512.542

В.Н. СЕМЕНЧУК

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ ПОДГРУПП

In this paper we obtain the description of finite groups for which any proper subgroup is either F-subnormal or F-abnormal for an arbitrary hereditary solvable supersoluble formations F.

В 1975 г. было получено описание конечных групп [1], у которых каждая подгруппа субнормальна или абнормальна. Естественным обобщением понятия субнормальности является понятие F-субнормальности, которое для произвольных конечных групп впервые введено Л.А. Шеметковым [2].

