

чие показывает, что в $\bar{C}$ каждая вершина является *источником* (т.е. все инцидентные ей дуги – исходящие), либо *стоком* (все инцидентные ей дуги – входящие).

Пусть $k > 2$. Без ограничения общности можно считать, что вершина v_0 является источником. Тогда вершины $v_1, v_3, \dots, v_{2k-1}$ являются стоками, а вершины v_2 и v_{2k} – источниками. Это невозможно, т.к. в C есть только одна из дуг. $\overline{v_1 v_{2k}}, \overline{v_{2k} v_1}$. Следовательно, $k=1$.

Итак, $C=(v_0, v_1, v_2)$. Так как v_0 не сравнима с v_1 и v_2 , то существуют вершины w_1 и w_2 такие, что w_i смежна с v_0 и не смежна с $v_i, i=1, 2$. Аналогично, существуют вершины x_0 и x_2 , смежные с v_1 и такие, что x_i не смежна с $v_i, i \in \{0, 2\}$. Наконец, существуют вершины y_0 и y_1 , смежные с v_2 и такие, что y_i не смежна с $v_i, i=0, 1$.

Если $w_1 = w_2, x_0 = x_2$ и $y_0 = y_1$, то получаем запрещенный порожденный подграф G_1 , что противоречит выбору G .

Поэтому можно считать, что $w_1 \neq w_2$ и вершина w_1 (соответственно w_2) смежна с v_2 (соответственно v_1). Если вершина x_0 смежна с v_2 , то множество $\{v_0, v_1, v_2, w_1, w_2, x_0\}$ порождает подграф G_2 – противоречие. Поэтому x_0 не смежна с v_1 . Аналогично, y_0 не смежна с v_1 . Тогда множество $\{v_0, v_1, v_2, w_1, w_2, x_0, y_0\}$ порождает подграф G_3 – противоречие. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает полиномиальный алгоритм распознавания расщепляемых бипороговых графов.

1. Харри Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Chvatal V., Hammer P.L. // Ann. Discr. Math. 1(1977). P. 145.
3. Golumbic M. Ch. Algorithmic graph theory and perfect graphs. New York, 1980.
4. Hammer P.L., Mahadev N.V.R. // SIAM J. Alg. Discr. Meth. 5(1985). P. 497.
5. Hammer P.L., Mahadev N.V.R., Peled U.N. // Discr. Meth. 119 (1993). P. 79.
6. Yannakakis M. // SIAM J. Alg. Discr. Meth. 3(1982) P.351.

Поступила в редакцию 01.09.98.

УДК 517.925.6

И.В.МАТАТОВА, В.А.ПРОКАШЕВА

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ НЕАВТОНОМНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

The conditions of the uniqueness of movable singularities for a not autonomic cubic system of special variety have been obtained. The classes of functions expressing the solutions of corresponding P-type systems have been established.

Изучению кубических систем двух дифференциальных уравнений на предмет однозначности подвижных особенностей посвящены работы [1–5]. В [4] получена теорема: «Если система $x = P_3(z, x, y), y = Q_3(z, x, y)$ (P_3, Q_3 – полиномы третьей степени по x, y с голоморфными по z коэффициентами) является системой P -типа, то: 1) либо она с помощью линейных преобразований искомых функций приводится к виду, не содержащему кубов искомых функций в обоих уравнениях. 2) либо приводится к одной из систем

$$\begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_9 y^3, \\ y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_5 y^2; \end{cases} \quad (B_1)$$

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2, \\ y = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_6 x^3, \end{cases} \quad (B_2)$$

когда упрощающие линейные преобразования не действуют». В работе [5] кратко изложена методика исследования подвижных особенностей систем (B_1) , (B_2) . Однако коэффициентные условия однозначности подвижных особых точек для указанных систем не получены. Целью настоящей статьи является нахождение условий принадлежности систем (B_1) , (B_2) множеству P , а также определение классов функций, через которые выражаются решения соответствующих систем P -типа.

Рассмотрим более подробно систему (B_1) . При $\beta_1(z) \neq 0$ из второго уравнения имеем

$$x = \frac{y - \beta_0 - \beta_2 y - \beta_5 y^2}{\beta_1}. \quad (1)$$

Исключая из (B_1) переменную $x=x(z)$, получим д. у. второго порядка

$$\begin{aligned} y = & [\alpha_1 + \beta_2 + \frac{\beta_1}{\beta_1}] + (\alpha_4 + 2\beta_5)y + (\alpha_9\beta_1 - \alpha_4\beta_5)y^3 + \\ & + (\alpha_5\beta_1 - \alpha_1\beta_5 - \alpha_4\beta_2 + \beta_5 - \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1})y^2 + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + \beta_2 - \alpha_4\beta_0 - \\ & - \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1})y + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \beta_0 - \frac{\beta_0\beta_1}{\beta_1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вводя новые обозначения коэффициентов

$$(A = \alpha_4 + 2\beta_5, B = \alpha_1 + \beta_2 + \frac{\beta_1}{\beta_1}, \dots, F = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \beta_0 - \frac{\beta_0\beta_1}{\beta_1}), \text{ д. у. (2) бо-}$$

лее кратко запишется так

$$y = [A(z)y + B(z)]y + C(z)y^3 + D(z)y^2 + E(z)y + F(z). \quad (2.1)$$

Если уравнение (2.1) свободно от многозначных подвижных особых точек, то необходимо, чтобы коэффициенты $A(z)$ и $C(z)$ удовлетворяли одному из следующих условий:

1) $A=C=0$; 2) $A=-2, C=0$; 3) $A=-3, C=-1$; 4) $A=-1, C=1$; 5) $A=0, C=2$ [6].

Далее рассматривается каждый из этих случаев отдельно [6], что позволяет получить условия однозначности подвижных особенностей для $x=x(z)$. Д. у. (2.1) охватывает первые десять уравнений из списка Пенлеве – Гамбье [6]. Среди них имеются уравнения, решения которых выражаются через элементарные и эллиптические функции, а также первое и второе уравнения Пенлеве. Так как компонента $y=y(z)$ рациональным образом зависит от x, x (это следует из формулы (3)), то условия однозначности подвижных особенностей для функции $x=x(z)$ обеспечивают это свойство и для функции $y=y(z)$.

Пусть $\beta_1(z) = 0$. При этом условии (B_1) превращается в вырожденную систему

$$\begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_9 y^3, \\ y = \beta_0 + \beta_2 y + \beta_3 y^2. \end{cases} \quad (\tilde{B})$$

Второе уравнение этой системы является уравнением Риккати. С помощью линейного преобразования искомой функции его можно привести к виду $y = -y^2 + b(z)$ (обозначение зависимой переменной оставили прежним), где функция $b(z)$ определенным образом выражается через $\beta_0, \beta_2, \beta_3$. Известно [7], что для решений д. у. Риккати точка $z_0 \in D$ (D – область голоморфности коэффициентов) может быть: 1) либо точкой голоморфности, 2) либо полюсом первого порядка. Соответствующие разложения в ряды функции $y=y(z)$ таковы:

$$1) y = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots, |z - z_0| < R_1, \quad (5)$$

$$2) y = \frac{1}{z - z_0} + c_1(z - z_0) + \dots, 0 < |z - z_0| < R_2, \quad (6)$$

причем коэффициенты b_i, c_i выражаются через $\beta_0, \beta_2, \beta_3$. Подставляя ряд (5) в первое уравнение системы (B_1) , получим линейное уравнение первого порядка $x' = A_0(z, z_0) + A_1(z, z_0)x$ с голоморфными в окрестности z_0 коэффициентами. По теореме Коши [7], $x=x(z)$ – голоморфная функция в окрестности z_0 . Подставим теперь в первое уравнение системы (B_1) вместо y ряд Лорана [6]. Обозначим через $\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_9$ коэффициенты первого уравнения системы (B_1) после линейной замены функции $y=y(z)$. Разлагая их в степенные ряды в окрестности z_0 , после упрощений будем иметь линейное д. у. вида $x' = B_0(z, z_0) + B_1(z, z_0)x$, причем $B_0 = \frac{\tilde{\alpha}_4(z_0)}{z - z_0} + \alpha_1(z_0) + \alpha_4(z_0) + \dots$ ($z=z_0$

– полюс первого порядка), $B_1 = \frac{\tilde{\alpha}_9(z_0)}{(z - z_0)^3} + \frac{\tilde{\alpha}_5(z_0) + \tilde{\alpha}_9(z_0)}{(z - z_0)^2} + \dots$ ($z = z_0$ – полюс третьего порядка). Используя формулу для общего решения линейного д. у. первого порядка, получим следующее утверждение.

Теорема 1. Для того чтобы решения вырожденной системы (B_1) имели в области голоморфности коэффициентов полярные подвижные особенности, необходимо, чтобы

$$\frac{\alpha_4(z)}{\beta_5(z)} = n, \text{ где } n - \text{целое число.}$$

Замечание 1 (к теореме 1). Вырожденная система (B_1) в точке голоморфности коэффициентов может иметь или полярную подвижную особенность, или логарифмическую (условие $\frac{\alpha_4(z)}{\beta_5(z)} = n, n \in \mathbb{Z}$, предполагается выполненным).

Замечание 2. По поводу системы (B_2) заметим следующее. Если в системе (B_1) заменить x на y (а y на x) и ввести новые обозначения, то получится система (B_2) . Поэтому отдельно ее рассматривать нет необходимости. Это касается и вырожденной системы $(\tilde{B}_2)$, которая получается из (B_2) при $a_2(z) \equiv 0$.

Таким образом, все изложенное выше позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 2. Если невырожденные системы д. у. (B_1) и (B_2) являются системами P -типа, то их решения выражаются: 1) либо через элементарные функции, 2) либо через эллиптические функции, 3) либо через функции-решения линейных д. у., 4) либо через функции-решения первого или второго уравнений Пенлеве.

1. Bureau F. J. // Bull. cl. Sci. Acad. roy. Belg. Vol. 67. № 9. P. 512.
2. Прокашева В. А. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 10. С. 869.
3. Прокашева В. А., Удот С. Н. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 1. С. 23
4. Мататов В. И., Михайловская Л. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. 1996. № 1. С. 39.
5. Он же. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 2. С. 216.
6. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939. С. 449.
7. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Л., 1950.

Поступила в редакцию 22.12.98.

УДК 517.925.6

Е. Я. КРИЧАВЕЦ, В. И. МАТАТОВ

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

The necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the movable singularities at the solutions of nondegenerate system are under consideration. Construction algorithm of these conditions is found by Painleve's method.

В работах [1–4] исследованы системы двух дифференциальных уравнений, решения которых не имеют перемещающихся критических точек. Проблема однозначности подвижных особенностей для системы вида

$$x' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad y' = \frac{R(x, y)}{Q(x, y)}, \quad \text{где } P, Q, R - \text{однородные полиномы по } x, y,$$

изучена в [1]. Аналогичная задача решена в статье [2] для системы двух уравнений с рациональными правыми частями специального вида при наличии условий Гамильтона. В [3] найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых решения системы “перекрестного” вида не содержат подвижных многозначных особенностей, а также установлены классы функций, через которые выражаются решения соответствующих систем. Неавтономные системы уравнений с дробно-линейными правыми частями рассмотрены в [4].

