УДК 519.1

И.Э. ЗВЕРОВИЧ

БИПОРОГОВЫЕ ГРАФЫ

A graph G is called *bithreshold* if there exist threshold graphs $T_i = T_i\ (V, E)$, $i = 1, 2$, such that $E = E_1 \cup E_2$ and every clique of G is a clique of either T_1 or T_2.

We obtain a characterization of split bithreshold graphs in terms of forbidden induced subgraphs.

Мы придерживаемся стандартной терминологии книги [1]. Граф G с множеством вершин $VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ называется *пороговым*, если существуют вещественные числа $w_1, w_2, \ldots, w_n$ и t такие, что множество всех (0, 1)-решений неравенства $w_1x_1, w_2x_2, \ldots, w_nx_n \leq t$ совпадает с множеством характеристических векторов независимых множеств графа G.

Теорема 1 (Хватал и Хаммер [2]). Граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не содержит порожденных подграфов $2K_2$, P_4 и C_4.

Пороговая размерность $t(G)$ графа G есть минимальное число (остовных) пороговых подграфов графа G, объединение которых есть G. Яннакакис [6] доказал, что проблема распознавания "$t(G) \leq k$" является NP-полной при любом $k \geq 3$. Граф G называется 2-пороговым, если $t(G) \leq 2$. Сложность проблемы распознавания 2-пороговых графов неизвестна (см., например, [3, с.233]).

Теорема 2 (Хаммер, Махадев и Пелед [5]). Класс всех 2-пороговых графов не имеет конечной характеризации в терминах запрещенных порожденных подграфов.

В связи с исследованием 2-пороговых графов в работе [4] введено следующее определение. Граф называется *бипороговым*, если существуют пороговые графы $T_i = T_i\ (V, E)$, $i = 1, 2$ такие, что $E = E_1 \cup E_2$ и каждая клика графа G является кликой в T_1 и T_2. (*Кликой* графа называется любое множество вершин, порождающее полный граф.)

Граф G называется *расщепляемым*, если существует разбиение $VG=K \cup S$ на клику K (*полная доля*) и независимое множество S (*пустая доля*). Каждый пороговый граф является расщепляемым. Поэтому структуру произвольного графа G с $t(G)=2$ можно представить следующим образом. Пусть T_1 и T_2 – два пороговых графа и $EG=ET_1 \cup ET_2$, причем $VG=VT_1 \cup VT_2$. Разобьем VT_i на полную долю K^i и пустую долю S^i, $i=1, 2$.

Обозначим (рис. 1)

$$A = K^1 \cap K^2,\quad B = K^1 \cap S^2,\quad C = S^1 \cap K^2 \quad \text{и} \quad D = S^1 \cap S^2.$$

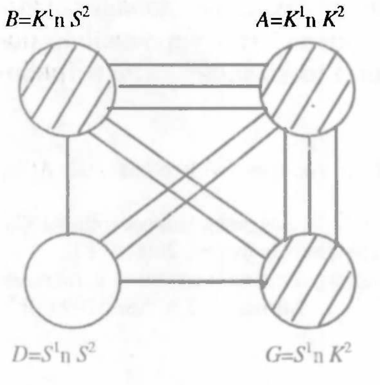

Рис. 1. Структура графа G с $t(G) = 2$

Ясно, что множества A, B и C являются кликами, а D – независимым множеством. Ребра между A и B, а также между A и C порождают полные двупольные графы. Подграфы, порожденные множествами $B \cup D$ и $C \cup D$, являются пороговыми. Подграф, порожденный множеством $B \cup C$, является дополнительным к двудольному. Такие бипороговые графы охарактеризованы в работе [5], где поставлена задача характеризации структурных частей бипорогового графа. Наконец, подграф, порожденный множеством $B \cup C$, является расщепленным.

Авторы упомянутой работы отмечают, что никакая структурная характеризация бипороговых графов не известна.

Из приведенного строения 2-пороговых графов ясно, что открытой остается в первую очередь проблема характеризации расщепляемых бипороговых графов. Здесь мы дадим такую характеризацию.

Теорема 3. Расщепляемый граф является бипороговым тогда и только тогда, когда он не содержит порожденных подграфов G_1, G_2, G_3, показанных на рис. 2.

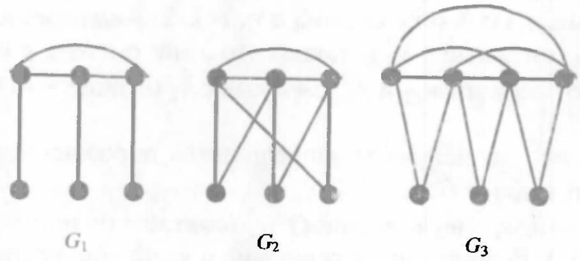

Рис. 2. Запрещенные порожденные подграфы для расщепляемых бнпороговых графов

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что каждый из графов G_1, G_2, и G_3 не является бипороговым.

Достаточность. Пусть G – расщепляемый граф с полной долей K и пустой долей S. Предположим, что G не содержит порожденных подграфов G_1, G_2, и G_3.

Вершины u, $v \in S$ назовем *сравнимыми*, если $N(u) \subset N(v)$ или $N(v) \subset N(u)$. Для графа G построим *граф несравнимости* $C(G)$ с множеством вершин S, в котором две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они не являются сравнимыми в G.

Пусть граф $C(G)$ является двудольным, и $A_1 U A_2$ – произвольное разбиение на доли. Покажем, что граф $T_i = G(KUA_i)$ является пороговым. Предположим, что T_i содержит четыре попарно различные вершины u, v, w, x такие, что u смежна с v, w смежна с x, v не смежна с w и u не смежна с x. Так как A_i – независимое множество, то $\{u, v\} \not\subset A_i$. Без ограничения общности будем считать, что $u \in K$. Тогда $x \in A_i$, $w \in K$ и $v \in A_i$. Следовательно, u смежна с w и x не смежна с v. Ясно, что вершины v и x не сравнимы и поэтому смежны в $C(G)$. Получаем противоречие с тем, что v и x принадлежат одной доле двухдольного графа $C(G)$. По теореме, граф T_i является пороговым. Ясно, что $EG=ET_1 U ET_2$ и каждая клика графа G является кликой в T_1 или T_2.

Пусть теперь граф $C(G)$ не является двудольным. Тогда G содержит порожденный нечетный простой цикл $C=(v_0, v_1, \ldots, v_{2k})$, $k > 1$. Покажем, что $k=1$. Каждое ребро xy графа $C(G)$ соответствует двум сравнимым вершинам x, $y \in S$. Если $N(x) \subset N(y)$, то выберем ориентацию $\overrightarrow{xy}$ ребра xy. В случае $N(x) = N(y)$ заменим ребро xy на две дуги $\overrightarrow{xy}$ и $\overrightarrow{yx}$.

В орграфе $\bar{C}$, полученном из C указанной ориентации дуг, не существует пары дуг вида $\overrightarrow{v_i v_j}$ и $\overrightarrow{v_j v_i}$. Действительно, при $i=k$ имеем $N(v_i)=N(v_j)$. Так как вершина v_j не сравнима с вершинами v_{i-1} (индексы вычисляются по mod$(2k+1)$), то v_i также не сравнима с этими вершинами. Поскольку цикл C является порожденным, то $|C| = 4$ – противоречие.

Пусть $i \neq k$. Тогда найдутся соседние (по циклу C) вершины v_l и v_{l+1} такие, что $\bar{C}$ содержит дуги $\overrightarrow{v_l v_j}$ и $\overrightarrow{v_j v_{l+1}}$. Тогда $N(v_l) \subset N(v_j) \subset N(v_{l+1})$ – противоречие с тем, что вершины v_l и v_{l+1} не сравнимы. Полученное противоречие показывает, что в $\bar{C}$ каждая вершина является *источником* (т.е. все инцидентные ей дуги – исходящие), либо *стоком* (все инцидентные ей дуги – входящие).

Пусть $k > 2$. Без ограничения общности можно считать, что вершина v_0 является источником. Тогда вершины $v_1, v_3, \ldots, v_{2k-1}$ являются стоками, а вершины v_1 и v_{2k} – источниками. Это невозможно, т.к. в C есть только одна из дуг $\overrightarrow{v_1 v_{2k}}$, $\overrightarrow{v_{2k} v_1}$. Следовательно, k=1.

Итак, $C=(v_0, v_1, v_2)$. Так как v_0 не сравнима с v_1 и v_2, то существуют вершины w_1 и w_2 такие, что w_i смежна с v_0 и не смежна с v_i, i=1, 2. Аналогично, существуют вершины x_0 и x_2, смежные с v_1 и такие, что x_i не смежна с v_i, $i \in \{0, 2\}$. Наконец, существуют вершины y_0 и y_1, смежные с v_2 и такие, что y_i не смежна v_i, i=0, 1.

Если $w_1 = w_2$, $x_0 = x_2$ и $y_0 = y_1$, то получаем запрещенный порожденный подграф G_1, что противоречит выбору G.

Поэтому можно считать, что $w_1 \neq w_2$ и вершина w_1 (соответственно w_2) смежна с v_2 (соответственно v_1). Если вершина x_0 смежна с v_2, то множество $\{v_0, v_1, v_2, w_1, w_2, x_0\}$ порождает подграф G_2 – противоречие. Поэтому x_0 не смежна с v_1. Аналогично, y_0 не смежна с v_1. Тогда множество $\{v_0, v_1, v_2, w_1, w_2, x_0, y_0\}$ порождает подграф G_3 – противоречие. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает полиномиальный алгоритм распознавания расщепляемых бипороговых графов.

1. Харри Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Chvatal V., Hammer P.L. // Ann. Discr. Maht. 1(1977). P. 145.
3. Golumbic M. Ch. Algorithmic graph theory and perfect graphs. New York, 1980.
4. Hammer P.L., Mahadev N.V.R. // SIAM J. Alg. Discr. Meth. 6(1985). P. 497.
5. Hammer P.L., Mahadev N.V.R., Peled U.N. // Discr. Meth. 119 (1993). P. 79.
6. Yannakakis M. // SIAM J. Alg. Discr. Meth. 3(1982) P.351.

Поступила в редакцию 01.09.98.

УДК 517.925.6

И.В.МАТАТОВА, В.А.ПРОКАШЕВА

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ НЕАВТОНОМНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

The conditions of the uniqueness of movable singularities for a not autonomic cubic system of special variety have been obtained. The classes of functions expressing the solutions of corresponding P-type systems have been established.

Изучению кубических систем двух дифференциальных уравнений на предмет однозначности подвижных особенностей посвящены работы [1–5]. В [4] получена теорема: «Если система $x = P_3(z, x, y)$, $y - Q_3(z, x, y)$ (P_3, Q_3 – полиномы третьей степени по x, y с голоморфными по z коэффициентами) является системой P–типа, то: 1) либо она с помощью линейных преобразований искомых функций приводится к виду, не содержащему кубов искомых функций в обоих уравнениях, 2) либо приводится к одной из систем