

Поскольку $\int_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r) dr < f_t(r_0)u = C_1 u / t^2$, первое слагаемое в (6) меньше, чем $2^{-1} \pi^{-1/2} C_1 t^{-3} \int_0^{t^2/6} u^{-1/2} du = C_2/t$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\infty} \left(\int_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r) dr \right) d\mu(u) &\leq \int_{r_0}^{\infty} \left(\int_0^u + \int_u^{r(u)} f_t(r) dr \right) d\mu(u) \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \int_0^u f_t(r) dr d\mu(u) + \int_{r_0}^{\infty} \int_u^{r(u)} f_t(r) dr d\mu(u), \end{aligned}$$

причем по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^u f_t(r) dr d\mu(u) &= \int_0^{\infty} \int_r^{\infty} d\mu(u) f_t(r) dr = \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-t^2/4}^{\infty} e^{-t^2/4r} r^{-3/2} dr \right) e^{-t^2/4r} r^{-3/2} dr - \frac{t}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2/4r} r^{-2} dr = C_3/t. \end{aligned}$$

Наконец, поскольку $f_t(r)$ убывает при $r > r_0$, то при $u > r_0$

$$\int_u^{r(u)} f_t(r) dr \leq f_t(u)(r(u) - u) < r_0 f_t(u).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\infty} \int_u^{r(u)} f_t(r) dr d\mu(u) &\leq r_0 \int_{r_0}^{\infty} f_t(u) d\mu(u) = \frac{t^3}{24\pi} \int_{t^2/6}^{\infty} \frac{e^{-t^2/4u}}{u \cdot u^2} du \leq \\ &\leq \frac{t^3}{24\pi} \cdot \frac{6}{t^2} \int_{t^2/6}^{\infty} \frac{e^{-t^2/4u}}{u^2} du = C_4/t. \end{aligned}$$

Следовательно, все условия теоремы 2 выполнены, и $-(-A)^{1/2} \text{Hol}(X) \forall A \in \text{Gen}(X)$.

1. Yosida K. // Proc. Japan Acad. 1960. Vol. 36. P. 81.
2. Balakrishnan V. // Pacific J. Math. 1960. Vol. 10. P. 419.
3. Kato T. // Proc. Japan Acad. 1960. Vol. 36. P. 94.
4. Иосида К. Функциональный анализ. М. 1967.
5. Миротин А. Р. // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. N 2. С. 142.
6. Он же. // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39. N 3. С. 571.
7. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Поступила в редакцию 11.09.99.

УДК 519.1

О.И.МЕЛЬНИКОВ, А.Н.ШИЛАК

ПОСТРОЕНИЕ ТРАНЗИТИВНОЙ РЕДУКЦИИ АЦИКЛИЧЕСКОГО ОРГРАФА

In the paper an algorithm of complexity $O(|VH|^2)$ for constructing the transitive reduction of an acyclic digraph is presented.

Пусть задан ориентированный граф $G=(V, E)$, где V – множество вершин, E – множество дуг. Пусть $|V|=n$, $|E|=m$.

Транзитивным замыканием орграфа G называется орграф $\tilde{G}=(V, \tilde{E})$, у которого дуга $(u, v) \in \tilde{E}$ тогда и только тогда, когда в орграфе G существует путь из вершины u в вершину v .

Транзитивной редукцией орграфа G называется минимальный по включению подграф орграфа G , транзитивное замыкание которого совпадает с транзитивным замыканием орграфа G .

В [1] приведен алгоритм сложности $O(mn)$, строящий одновременно транзитивное замыкание и транзитивную редукцию ациклического орграфа.

В [2] представлен алгоритм сложности $O(n^2)$ построения транзитивного замыкания орграфа.

В настоящей работе этот алгоритм использован для построения транзитивной редукции ациклического орграфа. сложность нового алгоритма такая же, как и у исходного.

Пусть G – связный ациклический орграф. Будем считать, что вершины орграфа G занумерованы так, что начало каждой дуги имеет номер меньший, чем ее конец. В противном случае такую нумерацию можно произвести за $O(m)$ операций [3]. Номер вершины v будет обозначаться $N(v)$.

Превратим орграф G в орграф T_0 по следующему правилу: для каждой вершины орграфа G удалим все дуги, входящие в эту вершину, кроме одной, с наибольшей начальной вершиной. Орграф T_0 является объединением корневых деревьев.

Пусть $\tilde{T}_0$ – транзитивное замыкание орграфа T_0 . Его можно построить за $O(q)$ операций [2], где q – число дуг орграфа $\tilde{T}_0$. Поскольку удаление любой дуги из орграфа $\tilde{T}_0$ нарушает связность одного из корневых деревьев, то T_0 – минимальный по включению орграф, транзитивное замыкание которого совпадает с орграфом $\tilde{T}_0$. Следовательно, орграф T_0 является транзитивной редукцией орграфа $\tilde{T}_0$.

Рассмотрим удаленные дуги и упорядочим их по убыванию номеров их концов, причем при одинаковом номере концов у нескольких дуг упорядочим эти дуги по убыванию номеров их начал. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_s$ – нумерация удаленных дуг, удовлетворяющая введенному порядку.

Пусть орграф $\tilde{T}_k$ есть транзитивное замыкание орграфа $T_k = T_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_k$, а орграф $\bar{T}_k$ – транзитивная редукция орграфа T_k и, следовательно, орграфа $\tilde{T}_k$.

Предположим, что орграфы $\tilde{T}_k$ и $\bar{T}_k$ построены. Пусть $e_{k+1} = (u, v)$ – очередная удаленная дуга. Если $e_{k+1} \in \tilde{T}_k$, то $\tilde{T}_{k+1} = \tilde{T}_k$. В этом случае $\bar{T}_{k+1} = \bar{T}_k$. Рассмотрим случай, когда $e_{k+1} \notin \tilde{T}_k$.

Теорема 1. Если $e_{k+1} \notin \tilde{T}_k$, то $\bar{T}_{k+1} = \bar{T}_k + e_{k+1}$.

Доказательство. Обозначим $T'_{k+1} = \bar{T}_k + e_{k+1}$.

Из определения транзитивной редукции следует, что транзитивные замыкания орграфов T_k и $\bar{T}_k$ совпадают. Следовательно, из соответствующих вершин этих орграфов достижимы одни и те же вершины. Поэтому при добавлении к обоим орграфам одной и той же дуги транзитивные замыкания полученных при этом орграфов будут одинаковыми. Следовательно,

$$\tilde{T}'_{k+1} = \tilde{T}_{k+1}. \quad (1)$$

Докажем минимальность орграфа T'_{k+1} , т.е. докажем, что после удаления любой дуги из орграфа T'_{k+1} будет нарушаться равенство (1).

Поскольку в орграфе $\tilde{T}_k$ отсутствует дуга $e_{k+1}=(u, v)$, то удаление этой дуги из T'_{k+1} приведет к тому, что вершина v не будет достижима из вершины u .

Теперь предположим, что после удаления из $\tilde{T}_{k+1}$ некоторой ранее добавленной дуги $e_l=(u_l, v_l)$, $0 < l < k+1$, транзитивное замыкание орграфа $T'_{k+1}-e_l$ будет совпадать с орграфом $\tilde{T}_{k+1}$.

Дуга e_l должна принадлежать транзитивному замыканию орграфа $T'_{k+1}-e_l$, так как $e_l \in \tilde{T}_{k+1}$. Следовательно, в орграфе $T'_{k+1}-e_l$ существует единственный (u_l, v_l) -путь, содержащий в качестве промежуточной дугу e_{k+1} , поскольку в противном случае при удалении этой дуги из орграфа $T'_{k+1}-e_l$ вершина v_l будет по-прежнему достижима из вершины u_l , т.е. $\tilde{T}_k$ не будет транзитивной редукцией.

При добавлении дуги $e_{k+1}=(u, v)$ в транзитивном замыкании могут появиться дуги $e'_i=(u'_i, v'_i)$ такие, что

$$N(u'_i) \leq N(u) < N(v) \leq N(v'_i). \quad (2)$$

Но из правил нумерации удаленных дуг следует, что $N(v_l) \leq N(v)$, причем если $N(v_l) = N(v)$, то $N(u_l) > N(u)$. Таким образом, неравенство (2) не выполняется. Это значит, что никакую ранее добавленную дугу удалить из орграфа T'_{k+1} нельзя.

Предположим, что после удаления некоторой дуги $e_0=(u_0, v_0)$, принадлежащей орграфу T_0 , транзитивное замыкание орграфа $T'_{k+1}-e_0$ будет совпадать с орграфом $\tilde{T}_{k+1}$. Рассуждая как и ранее, можно показать, что $N(u_0) \leq N(u) < N(v) \leq N(v_0)$, и существует (u_0, v_0) -цепь $L=(u_0, \dots, u, v, \dots, w, v_0)$, содержащая в качестве промежуточной дугу $e_{k+1}=(u, v)$. В этом случае $N(w) > N(u_0)$, и по правилу построения орграфа T_0 из орграфа G будет удалена дуга (u_0, v_0) .

Теорема доказана.

Используя теорему 1, можно предложить алгоритм построения транзитивной редукции ациклического орграфа G .

Алгоритм B построения транзитивной редукции ациклического орграфа.

1. Построить орграф T_0 .
2. Занумеровать удаленные дуги: $e_1, e_2, \dots, e_s$.
3. Построить $\tilde{T}_0$. Положить $\tilde{T}_0 = T_0$.
4. Пусть построены орграфы $\tilde{T}_k$ и $\tilde{T}_k$.

Если $e_{k+1} \in \tilde{T}_k$, то $\tilde{T}_{k+1} = \tilde{T}_k$.

Если $e_{k+1} \notin \tilde{T}_k$, то $\tilde{T}_{k+1} = \tilde{T}_k + e_{k+1}$.

Построить орграф $\tilde{T}_{k+1}$.

Алгоритм прекращает работу после выполнения п. 4 для каждой из удаленных дуг. Орграф $\tilde{T}_s$ является транзитивной редукцией орграфа G .

Теорема 2. Трудоемкость предложенного алгоритма равна $O(n^2)$.

Доказательство. Алгоритм A построения транзитивного замыкания орграфа [2] имеет сложность $O(n^2)$. Орграф G задается списком смежности и матрицей смежности B . В процессе реализации алгоритма используется также матрица смежности B_k орграфа $\tilde{I}_k$, $k=0, 1, \dots, s$. Будем использовать также C_k – матрицу смежности транзитивной редукции орграфа T_k .

Рассмотрим дополнительные операции, которые выполняются в алгоритме B по отношению к алгоритму A .

При нумерации удаленных дуг для каждой вершины с номером j ($j=1, 2, \dots, n$) просматриваются вершины с номерами $j-1, j-2, \dots, 1$ в указанном порядке. Если в матрице B элемент $b_{ji}=1$, а в матрице C_0 соответствующий элемент равен 0, то дуга (i, j) была удалена в процессе построения орграфа T_0 . Удаленные дуги нумеруются в процессе обнаружения. Нумерация, произведенная подобным образом, требует $O(n^2)$ операций.

Проверка в п.4 наличия или отсутствия дуги e_{k+1} проводится с помощью матрицы B_k за одну операцию.

Во всем остальном алгоритм B не отличается от алгоритма A .

Теорема доказана.

1. Goralčikova A., Koubek V. // Lect. Notes Comput. Sci. 1979. Vol.71. P.301.

2. Мельников О.И., Радчук А.А., Радчук В.Я. // Вестн АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. №3. 1996. С.87–88.

3. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., 1980.

Поступила в редакцию 23.03.99.

УДК 517.948.32:517.544

Н.А. ДЕГТЯРЕНКО, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

НАХОЖДЕНИЕ СПЕКТРА И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ В КАЧЕСТВЕ ЯДРА

The spectrum of a self-adjoint singular integral operator with elliptic function as a kernel is determined. The system of its proper functions in explicit form is constructed.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\lambda \varphi(x) - \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\operatorname{sn}(\tau - x)} = f(x), \quad -a < x < a, \quad (1)$$

где $\operatorname{sn}(\cdot)$ – эллиптическая функция Якоби [1, с.94] с основными периодами $4K$ и $2iK$ (K и K – некоторые положительные числа), а λ и a – числовые параметры, причем $0 < a < K$. Будем предполагать, что заданная функция $f(x)$ и неизвестная функция $\varphi(x)$ принадлежат пространству $L_2(-a, a)$.

Так как $\operatorname{sn} z \sim z$ при $z \rightarrow 0$, то выражение $\frac{d\tau}{\operatorname{sn}(\tau - z)}$ есть аналог ядра Коши на

торе. Торе, как известно, можно реализовать в виде прямоугольника со сторонами длин $4K$ и $2K$, противолежащие стороны которого параллельны осям координат и попарно отождествлены. В качестве такого прямоугольника зафиксируем, например, прямоугольник вида $[-K, 3K] \times [-iK, iK]$.