

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВОЙНОГО ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ ОГРАНИЧЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

A digital controller with minimizing control intensity criteria for the system of a double inverted pendulum on a cart is considered. The algorithm is implemented on a PC and some results are presented.

1. В [1] рассматривается задача стабилизации в верхнем положении двух шарнирно соединенных стержней, свободно закрепленных на подвижной платформе, которая может двигаться по наклонной прямой (рис. 1).

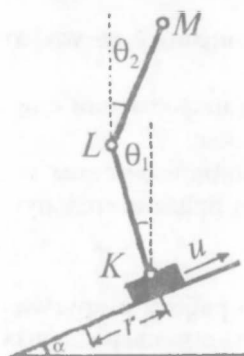


Рис. 1

Математическая модель системы имеет вид

$$\dot{x} = Ax + bu + gd, \quad (1)$$

где $x = (r, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) \in R^6$ – вектор состояния, $u \in R$ – скалярное управление, $b, g \in R^6$, $A \in R^{6 \times 6}$, $d \in R$ – параметры системы, r – удаление платформы от начального положения, θ_1 – угол между вертикалью и стержнем KL , θ_2 – угол между вертикалью и стержнем LM , $\dot{r}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ – соответствующие скорости, $d = \sin \alpha$, α – угол наклона прямой, по которой происходит движение платформы.

Параметры системы имеют следующие численные значения:

$$b = (0; 0; 0; 46,11; -63,75; 71,13),$$

$$g = (0; 0; 0; -24,09; 33,31; -37,17),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4,722 & 0,1402 & -4,624 & 0,01916 & -9,9441 \\ 0 & 34,99 & -13,26 & 6,394 & -0,1902 & 0,186 \\ 0 & -39,04 & 62,42 & -7,133 & 0,3999 & -0,6451 \end{pmatrix}$$

В [1] построена линейная обратная связь $u = k'x$, которая стабилизирует систему (1) относительно состояния равновесия $(0, 0; 0; 0; 0; 0) \in K$ и может принимать любые значения (т. е. ограничения на управление не накладывались).

Цель настоящей работы – описать алгоритм стабилизации системы (1) ограниченными управлениями. В основе алгоритма лежат методы оптимального управления, описанные в [2].

2. Параметрами алгоритма является действительное число $h > 0$ и натуральные числа m и N . Обозначим $v = mh$, $\theta = Nh$.

Будем рассматривать задачу (1), полагая, что платформа движется по горизонтали, т. е. $\alpha = 0$.

Доступным управлением назовем кусочно-постоянную функцию $u(t)$, заданную на промежутке $T = [0, \theta]$, если $u(t) = u_j$, $t \in [(j-1)h, jh]$, $j = \overline{1, N}$ и $|u(t)| \leq L$, $t \in T$.

Доступное управление $u(t)$, $t \in T$, называется допустимым для состояния z , если траектория $x(t)$, $t \in T$, системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z$$

удовлетворяет условию $x(\theta) = 0$.

Качество допустимого управления оценим значением функционала

$$\rho(u) = \max_{t \in T} |u(t)|.$$

Оптимальным программным управлением для состояния z будем называть допустимое управление $u^0(t) = u^0(t|z)$, $t \in T$, если на нем критерий качества достигает минимума $\rho(u^0) = \min \rho(u)$ по всем допустимым управлениям.

По определению, оптимальное программное управление является решением задачи

$$\rho(z) = \min_u \rho,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z, \quad x(\theta) = 0, \quad |u(t)| < \rho, \quad t \in T. \quad (2)$$

Для решения задачи (2) приведем ее к другому виду, записав конечное состояние $x(\theta)$ по формуле Коши:

$$x(\theta) = F(\theta)x(0) + \int_0^\theta F(\theta - t)bu(t)dt = F(\theta)x(0) + \sum_{j=1}^N u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F(\theta - t)bdt. \quad (3)$$

Положим $\xi_j = \frac{u_j}{\rho}$, $j = \overline{1, N}$, $\xi_0 = \frac{1}{\rho}$ и разделим (3) на ρ . Задача (2) примет вид:

$$\xi_0 \rightarrow \max, \\ F(\theta)x(0)\xi_0 + \sum_{j=1}^N \xi_j \int_{(j-1)h}^{jh} F(\theta - t)bdt = 0, \quad (4)$$

$$\xi_0 \geq 0, \quad |\xi_j| \leq 1, \quad j = \overline{1, N}.$$

Задача (4) называется в [2] сопровождающей для задачи стабилизации.

3. Процесс функционирования системы представляет собой циклическое выполнение следующих трех шагов.

1) Для текущих момента τ и состояния системы $x(\tau)$ регулятор строит оптимальное программное управление на отрезке $[\tau, \tau + \theta]$, приводящее систему в момент $\tau + \theta$ в ноль.

2) Регулятор подает в систему посчитанное управление на отрезке $[\tau, \tau + \nu]$.

3) В момент $\tau + \nu$ система попадает в некоторое состояние $x(\tau + \nu)$. Теперь текущим моментом считается $\tau + \nu$.

Таким образом, вырабатываемое регулятором управление является программно-позиционным. В [2] доказывается, что интенсивность вырабатываемого управления не возрастает в цикле, а в моменты времени, отстоящие друг от друга на расстояние θ , убывает. Доказательство устойчивости стабилизируемого движения [2] можно провести методом функций Ляпунова.

Для построения оптимального программного управления на первом шаге решается сопровождающая задача (4), которая является задачей линейного программирования. В процессе работы системы приходится решать ряд та-

Зависимость максимума интенсивности управления и времени переходного процесса от параметров θ и h при $\nu=\theta/2$

$\theta\nu$	$5h$	$7h$	$10h$
0,7	22,70/37*	16,70/40	15,80/64
0,8	12,70/37	9,49/51	8,99/66
0,9	7,81/37	5,93/54	5,63/70
1,0	5,19/38	4,06/58	3,80/76
1,1	3,66/39	2,97/66	2,71/81
1,2	2,78/40	2,30/77	2,05/95
1,3	2,23/44	1,86/91	1,61/128
1,4	1,90/48	1,55/108	1,31/188
1,5	1,66/54	1,33/131	1,12/248
1,6	1,48/62	1,16/161	0,99/297

*Слева от черты указан максимум интенсивности, справа – время переходного процесса

ких задач, но они различаются только первыми столбцами в матрице основных ограничений. Это различие тем меньше, чем меньше ν . Поэтому для решения этих задач удобно использовать двойственный метод, выбирая в качестве начальной опоры $K_{оп}(\tau+\nu)$ в момент $\tau+\nu$ оптимальную опору $K_{оп}^*(\tau)$ сопровождающей задачи с предыдущего шага. Известно, что на построение оптимальной опоры $K_{оп}^*(\tau)$ потребуется небольшое число итераций двойственного метода.

Запуск системы производится после построения оптимальной опоры $K_{оп}^*(0)$.

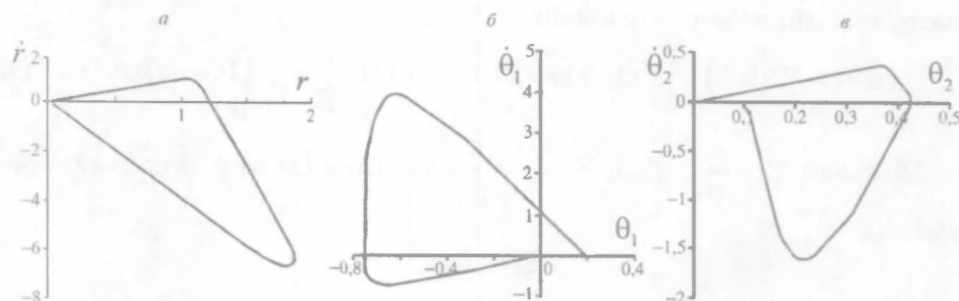


Рис.2

4. Программа, реализующая алгоритм п. 2-4, была написана и протестирована на ПЭВМ. Входными данными были параметры m , N , θ и начальное состояние системы $x(0)$. Процесс моделирования останавливался в момент, когда система оказывалась в состоянии, норма которого в 10 раз меньше нормы состояния $x(0)$. Для решения сопровождающей задачи использовался адаптивный алгоритм [3]. Из-за погрешности машинных вычислений и быстрого роста фундаментальной матрицы $F(t)$ при увеличении t значения параметра θ были ограничены интервалом $[0,35; 1,85]$. В таблице и на рис. 2 приведены результаты работы программы для начального состояния $x(0)=(0; 0,2; 0,1; 0; 0; 0)$.

Для $\theta=1,0$, $m=2$, $h=0,1$ проекции фазовых траекторий на подпространства состояния изображены на рис. 2. Время переходного процесса – 38ν .

¹ Furuta K., Kajiwara H., Koguge K. // International J. Control. 1980. 32. № 5.

² Габасов Р., Ружицкая Е. А. // Кибернетика и системный анализ. №1. 1989. С. 1.

³ Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. II Задачи управления. Мн., 1984.

Поступила в редакцию 09.03.99.