

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАГРЕВА ПОЛУПРОСТРАНСТВА ЧЕРЕЗ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННУЮ ПОЛОСУ

The solution of a non-stationary heat transfer problem with mixed boundary conditions for half-space is offered.

Пусть требуется решить двумерную осесимметричную нестационарную задачу теплопроводности для полупространства, нагреваемого по закону Фурье через бесконечно длинную полосу шириной $2R$, причем вне полосы на поверхности полупространства поддерживается начальная температура (т.е. заданы смешанные граничные условия):

$$a^{-1}\theta_{\tau}(x, z, \tau) = \theta_{xx}(x, z, \tau) + \theta_{zz}(x, z, \tau), \quad x, z, \tau, a > 0, \quad (1)$$

$$-\theta_z(x, 0, \tau) = \frac{\alpha(x, \tau)}{\lambda}, \quad 0 < x < R, \lambda \neq 0, \tau > 0, \quad (2)$$

$$\theta(x, 0, \tau) = 0, \quad R < x < \infty, \tau > 0, \quad (3)$$

$$\theta_x(0, z, \tau) = 0, \quad z, \tau > 0, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, z, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (5)$$

Предполагая существование интеграла Лапласа для $\theta(x, z, \tau)$ и применяя преобразование $\bar{\theta}(x, z, s) = L[\theta(x, z, \tau)] = \int_0^{\infty} \exp(-s\tau)\theta(x, z, \tau)d\tau$ к (1)-(5), методом разделения переменных можно получить искомое решение уравнения (1) при условиях (4), (5) в области L -изображений в виде

$$\bar{\theta}(x, z, s) = \int_0^{\infty} \bar{C}(p, s) \exp(-z\sqrt{p^2 + s/a}) \cos(px) dp, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (6)$$

Используя смешанные граничные условия (2), (3), для неизвестной функции-изображения $\bar{C}(p, s)$ из (6) получаем парные интегральные уравнения

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \bar{C}(p, s) \sqrt{p^2 + s/a} \cos(px) dp = \frac{\bar{q}(x, s)}{\lambda}, & 0 < x < R, \operatorname{Re} s > 0, \\ \int_0^{\infty} \bar{C}(p, s) \cos(px) dp = 0, & R < x < \infty, \operatorname{Re} s > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Функцию $\bar{C}(p, s)$ будем искать в виде

$$\bar{C}(p, s) = (p^2 + s/a)^{-0.5} \int_0^R \varphi(t, s) \sin(t\sqrt{p^2 + s/a}) dt, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (8)$$

что обеспечивает выполнение второго из системы (7) уравнения автоматически, так как возникающий при этом разрывный интеграл

$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t\sqrt{p^2 + s/a})}{\sqrt{p^2 + s/a}} \cos(px) dp$ равен нулю при $x > t$ (см. [1]), а в данном случае $0 < t < R, R < x < \infty$.

Подставив (8) в первое из системы (7) уравнение и введя обозначение $w(x, s, t, p) = \sin(t\sqrt{p^2 + s/a}) \cos(px)$, получим интегральное уравнение для определения вспомогательной функции $\varphi(t, s)$:

$$\int_0^{\infty} \int_0^R \overline{\varphi}(t,s) w(x,s,p,t) dt dp = \int_0^x \overline{\varphi}(t,s) \int_0^{\infty} w(x,s,t,p) dp dt + \int_x^R \overline{\varphi}(t,s) \int_0^{\infty} w(x,s,t,p) dp dt = \frac{\overline{q}(x,s)}{\lambda}, \quad 0 < x < R, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (9)$$

Воспользовавшись значением разрывного интеграла (см. [1])

$$\int_0^{\infty} w(x,s,t,p) dp = \begin{cases} -\frac{t\sqrt{s/a} K_1(\sqrt{s/a}\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}}, & \text{если } 0 < t < x, \\ \frac{\pi t\sqrt{s/a} Y_1(\sqrt{s/a}\sqrt{t^2-x^2})}{2\sqrt{t^2-x^2}}, & \text{если } 0 < x < t, \end{cases}$$

где $K_1(\xi)$ и $Y_1(\xi)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Бесселя второго рода первого порядка [2], интегральное уравнение (9) преобразуем к виду

$$\int_0^x \frac{t\overline{\varphi}(t,s) K_1(\sqrt{s/a}\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}} dt - \frac{\pi}{2} \int_x^R \frac{t\overline{\varphi}(t,s) Y_1(\sqrt{s/a}\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}} dt = -\frac{\overline{q}(x,s)}{\lambda\sqrt{s/a}}, \quad 0 < x < R, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Таким образом, представив далее аналитическую функцию $\overline{\varphi}(t,s)$ в виде функционального ряда по степеням $\sqrt{s}$ и зная разложение известной функции $\overline{q}(t,s)$, аналогично, например [3], определяется искомая функция $\overline{\varphi}(t,s)$, что, по существу, и завершает решение поставленной задачи.

¹ Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды – элементарные функции. М., 1981.

² Они же. Интегралы и ряды – специальные функции. М., 1983.

³ Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // ИФЖ. 1998. Т. 71. №4. С. 734.

Поступила в редакцию 18.01.99