1. Lucantoni D. // Communications and Statistics – Stochastic Models. 1991. Vol. 7. № 1.
2. Neuts M., Lucantoni D. // Communications and Statistics – Stochastic Models. 1994. Vol. 10. № 3.
3. Бочаров П.П. // Вест. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. Прикл. мат. и информ. 1995. № 1.
4. Combe M. Queuing models with dependence structures. Amsterdam, 1991.
5. Клименок В.И. // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети. 1998. Т. 14.

Поступила в редакцию 18.01.99.

УДК 517.5

В. Н. РУСАК, С. А. ЛУГОВСКИЙ

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

The following main result is proved: rational interpolating operators with one or two m-multiple poles are approximated individual analytic functions essentially better than best polynomial approximations.

Пусть $f(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и непрерывна в замыкании $|z|\le 1$. Определим норму, полагая

$$\|f\| = \sup_{|z|\le 1} |f(z)|,$$

и наилучшее полиномиальное приближение $E_n(f) = \inf_{p_n} \|f(z) - p_n(z)\|$. Из исследований С. Н. Бернштейна [1] вытекает, что скорость приближения аналитических функций алгебраическими полиномами порядка n зависит в первую очередь от особых точек функции, расположенных на наименьшей окружности $|z|=\rho$ (>1). В данной работе рассматривается рациональный интерполяционный оператор $r_{n,m}(z, f)$ с двумя или тремя геометрически различными узлами для аналитических функций

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \tag{1}$$

где $f_1(z)$ имеет особые точки логарифмического типа на окружности $|z|=|a|$, $|a|>1$, а $f_2(z)$ аналитична в области $|z|<|a|$, и устанавливается, что уклонение

$$\|f(z) - r_{n,m}(z, f)\|$$

существенно зависит лишь от компоненты $f_1(z)$.

Пусть $\chi(z)$ есть произведение Бляшке с $(n-m)$-кратным нулем в точке $z=0$ и m-кратным нулем в точке $z=1/a$, т. е.

$$\chi(z) \overset{\text{def}}{=} z^{n-m} \left(\frac{za - 1}{z - a} \right)^m .$$

Введем интерполяционный оператор, полагая

$$r_{n,m}(z, f) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} f(\xi) \frac{\xi\chi(\xi) - z\chi(z)}{(\xi - z)\xi\chi(\xi)} d\xi . \tag{2}$$

Известно (см. [2] и [3]), что операторы $r_{n,m}(z, f)$ интерполируют функцию $f(z)$ в точках $z=0$ и $z=1/a$ с соответствующей кратностью.

Теорема 1. При фиксированном m и $n\to\infty$ выполнено соотношение

$$\|f(z) - r_{n,m}(z, f)\| = O\left(\frac{1}{n^m} E_n(f_1) \right),$$

где $f_1(z) = \ln\left(1 - \frac{z}{a}\right)$ или $f_1(z) = \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $|a|>1$, и $f(z)$ задано в форме (1).

В случае нечетных аналитических функций целесообразно рассматривать интерполяционные операторы $r_{2n+1,2m}(z, f)$, которые определяются также равенством (2), где произведение Бляшке подбирается в соответствии с точками ветвления.

Теорема 2. Если $f_1(z) = \arcsin\frac{z}{a}$; $\operatorname{arctg}\frac{z}{a}$, то при фиксированном m и $n \to \infty$ выполнены соотношения

$$\left\| f(z) - r_{2n+1,2m}(z, f) \right\| = \begin{cases} O\left(n^{\frac{1}{2}-m} \cdot E_{2n+1}\left(\arcsin\frac{z}{a} \right) \right) \\ O\left(n^{-m} \cdot E_{2n+1}\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{a} \right) \right) \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть для определенности $f_1(z) = \ln\left(1 - \frac{z}{a}\right)$ и a есть действительное число, $a>1$. Во-первых, заметим, что берется

$$\ln\left(1 - \frac{z}{a}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a}\right)^k ,$$

и наилучшее полиномиальное приближение этой функции имеет точный порядок

$$E_n(f_1) = O\left(\frac{1}{na^n}\right). \tag{3}$$

Для уклонения $f(z)$ от интерполяционного оператора (2) с учетом соотношения (1) и интегральной формулы Коши найдем, что в $|z| \le 1$

$$f(z) - r_{n,m}(z, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} f(\xi) \frac{z\chi(z)}{(\xi - z)\xi\chi(\xi)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} f_1(\xi) \frac{z\chi(z)}{(\xi - z)\xi\chi(\xi)} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} f_2(\xi) \frac{z\chi(z)}{(\xi - z)\xi\chi(\xi)} d\xi = I_1 + I_2,\ 1 < \rho < a. \tag{4}$$

Поскольку подынтегральная функция

$$\frac{\ln(1 - \xi/a)}{\xi - z} \cdot \frac{(\xi - a)^m}{(\xi a - 1)^m \xi^{n-m+1}}$$

имеет нуль кратности m в точке $\xi = a$ и нуль кратности $n-m+2$ в точке $\xi = \infty$, то контур интегрирования в I_1 можно деформировать в дважды пробегаемый луч $[a, \infty)$. В итоге после некоторых вычислений будем иметь

$$|I_1| = \left| z\chi(z) \int_a^{\infty} \frac{dx}{(x - z)x\chi(x)} \right| \le \int_a^{\infty} \frac{dx}{x|x - z||\chi(x)|} = \int_a^{\infty} \frac{1}{|x - z|} \cdot \frac{(x - a)^m}{(xa - 1)^m x^{n-m+1}} dx <$$

$$< \int_a^{\infty} \frac{(x - a)^m}{(x - 1)(a - 1/x)^m x^{n+1}} dx < \frac{a^{m+1}}{(a - 1)^{m+1}(a + 1)^m} \int_a^{\infty} \frac{(x - a)^m}{x^{n+2}} dx =$$

$$= \frac{m!}{(a^2 - 1)^m (a - 1) a^{n-2m} (n - m + 1)(n - m + 2)\dots(n + 1)} = O\left(\frac{1}{a^n n^{m+1}}\right). \tag{5}$$

Что касается интеграла I_2, то контур интегрирования в нем можно деформировать в окружность $|\xi| = a_1 > a$, и на этой окружности $|f_2(\xi)| \le M$. Соответственно получим

$$|I_2| = \left| \frac{z\chi(z)}{2\pi i} \int_{|\xi|=a_1} f_2(\xi) \frac{(\xi-a)^m}{(\xi-z)(\xi a-1)^m \xi^{n-m+1}} d\xi \right| \le \frac{M}{2\pi} \int_{|\xi|=a_1} \frac{(|\xi|+a)^m |d\xi|}{(|\xi|-1)|\xi|^{n-m+1}(|\xi|a-1)^m} =$$

$$= \frac{M}{a_1^{n-m}} \left(\frac{a_1+a}{aa_1-1} \right)^m \cdot \frac{1}{(a_1-1)} = O\left(\frac{1}{a_1^n} \right) \qquad (6)$$

Поскольку равенство (3) дает точный порядок для $E_n(f_1)$, то из соотношений (4) – (6) вытекает, что

$$\|f(z)-r_{n,m}(z,f)\| = O\left(\frac{1}{a^n n^{m+1}} \right) + O\left(\frac{1}{a_1^n} \right) = O\left(\frac{1}{a^n n^{m+1}} \right) = O\left(\frac{1}{n^m} E_n(f_1) \right).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $f_1(z) = \left(1-\frac{z}{a}\right)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\left(-\frac{z}{a}\right)^k$, то интегрирование в I_1 также проводится в конечном итоге по двум берегам разреза вдоль луча $[a, \infty)$.

Замечание 2. Тейлоровское разложение функции $\arcsin\frac{z}{a}$ имеет вид:

$$\arcsin\frac{z}{a} = \frac{z}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} \left(\frac{z}{a} \right)^{2k+1},$$

соответственно при доказательстве теоремы 2 для этой функции произведение Бляшке берется в форме

$$\chi(z) = z^{2n-2m+1} \left(\frac{z^2a^2-1}{z^2-a^2} \right)^m, |a|>1.$$

Рассмотрим теперь линейные комбинации с доминирующей компонентой

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\nu} g(z/a_k),\ 1 < a_1 < a_2 \le \ldots \le a_\nu, \qquad (7)$$

где в качестве $g(z)$ берется одна из функций

$$\ln(1-z),\ (1-z)^\alpha,\ \arcsin z,\ \operatorname{arctg} z,\ \arccos z,\ \operatorname{arcctg} z.$$

Непосредственным следствием из теорем 1 и 2 является следующее утверждение

Теорема 3. Если $f(z)$ есть линейная комбинация вида (7), то

$$\|f(z)-r_{n,m}(z,f)\| = O\left(\frac{1}{n^m} E_n(g(z/a_1)) \right) \text{ где } g(z)=\ln(1-z);\ (1-z)^\alpha;$$

$$\|f(z)-r_{2n+1,2m}(z,f)\| = \begin{cases} O\left(n^{\frac{1}{2}-m} \cdot E_{2n+1}\left(\arcsin\frac{z}{a_1} \right) \right), \\ O\left(n^{-m} \cdot E_{2n+1}\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{a_1} \right) \right) \end{cases}$$

Замечание 3. Приведенные теоремы показывают, что за счет одного или двух полюсов кратности m достигается такой эффект, что рациональная аппроксимация примерно в m раз меньше наилучшей полиномиальной аппроксимации для индивидуальных аналитических функций.

[1] Бернштейн С. Н. Собр. соч. : В 4 т. М., 1952. Т.1. С. 136.
[2] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.

[3] Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л., 1964.

Поступила в редакцию 25. 01. 99.

УДК 621.321.1:519.1

Н.И ЛИСТОПАД, А.Г. КОПАЧЕВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ISABEL-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ВИДЕОКОНФЕРЕНЦИЙ

Describes the methods of creating distributed videoconferences in heterogeneous environments by using ISABEL application.

The determination of Quality of Services is introduced. Approaches providing interactive collaboration of the participants connected via communication channels with different Quality of Services are described. One of these approaches consists of the description of ISABEL network module called Flow Server. Some practical examples of using Flow Server during global videoconferences are given.

The scheme of organizing global videoconferences is given. This scheme allows corporate educational networks (like UNIBEL) to participate in distributed events.

Создание услуг интерактивного взаимодействия в режиме реального времени, включающих аудио-видео конференции, требует достижения заданного уровня качества услуг.*

Авторами проведен анализ использования приложения ISABEL для организации и проведения распределенных глобальных видеоконференций. Уточнены используемые термины и определения. Введено новое понятие – сервер потоков. Описана практическая схема организации глобальных видеоконференций с использованием различных сетей передачи данных с совершенно разным уровнем качества услуг. Впервые продемонстрирована возможность участия в распределенных событиях корпоративных образовательных сетей (на примере сети UNIBEL). Представлены результаты локальной конференции «Education in information society» (EIS) с участием ведущих стран мира и сети UNIBEL, проходивщей в ноябре 1998 г. в Минске в Вычислительно-аналитическом центре (ВАЦ) Министерства образования Республики Беларусь. Конференция транслировалась в Вену с использованием технологии ISDN со скоростью 384 Кб/с. Deutsche Telekom обеспечивал сетевое соединение для ВАЦ. Аудитория, в которой проходила локальная конференция в Минске, была подключена к маршрутизатору (CISCO 3640) с использованием существующей оптоволоконной инфраструктуры сети UNIBEL. Такая распределенная сетевая инфраструктура позволяла устанавливать соединение практически из любой точки сети без потери скорости и качества взаимодействия.

1. Организация интерактивного взаимодействия с приложением ISABEL

Под интерактивным взаимодействием следует понимать взаимодействие групп людей. находящихся в аудиториях, офисах и использующих рабочие станции с активным приложением. ISABEL[1]–это масштабируемое приложение. которое было разработано для создания услуг интерактивного взаимодействия в режиме реального времени и используется для проведения семинаров. презентаций. видеоконференций.

* Под качеством услуг понимается набор количественных и качественных характеристик некоторой распределенной мультимедийной системы, который обеспечивает достижение требуемой функциональности выполняемого приложения. Существует множество сетевых технологий с различными уровнями качества услуг.