

риантно. Поэтому все решения системы линейного приближения (7) неограниченно приближаются к E_1 . Это на основании свойств общего решения линейных систем и означает, что у матрицы $H_0(2n-1)$ собственное значение имеет отрицательные действительные части.

Согласно лемме 2. в системе (7) мы имеем дело с критическим случаем одного нулевого корня. Нетрудно убедиться в том, что подходящей заменой координат систему (7) можно привести к системе $\dot{w} = Bw + L(w, z), w \in R^{2n-1}; z = 0, z \in R$, где матрица B имеет собственные значения лишь с отрицательными действительными частями. причем $z = \sum_{i=1}^n v_i$. Отсюда вытекает

Теорема 3. Если матрица $(-A)$ определено положительна и отсутствует эффект насыщения (т.е. $M = 0$), то равновесные цены $p_j = p_j^0, j = \overline{1, n}$, и равновесные объемы продаж $q_j = q_j^0, j = \overline{1, n}$, устойчивы. При этом общий объем продаж рынка $Q(t)$ с течением времени асимптотически приближается к одному из равновесных значений $Q^0 = \sum_{j=1}^n q_j^0 + \text{const.}$

¹ Калитин Б. С. // Вести. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. № 2. С. 68.

² Долан Э. Дж., Линдсей Д. Рынок: микроэкономическая модель. СПб., 1992.

³ Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.

Поступила в редакцию 12.03.98.

УДК 519.10

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, Ю. В. НИКУЛИН

О РАДИУСЕ СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ

In this paper we investigate such type of stability of the Pareto set in a vector linear trajectory problem of discrete optimization where the small perturbations of vector criterion parameters can lead to appearance of new Pareto optimal trajectories, but one trajectory of the initial problem at least must stay Pareto optimal in the perturbed problem.

Обычно под устойчивостью векторной задачи дискретной оптимизации понимают (см., например, [1–5]) дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху (по Хаусдорфу) парето-оптимального отображения, т.е. существование таких “малых” возмущений параметров задачи, при которых невозможно появление новых оптимумов Парето, т.е. множество Парето исходной задачи может лишь сузиться. Ослабление этого требования приводит к понятию сильной устойчивости. Этот тип устойчивости трактуется как наличие такого возмущения параметров задачи, при котором хотя и возможно появление новых оптимумов Парето, однако должна сохраняться парето-оптимальность хотя бы одного из решений исходной задачи.

Авторами данной статьи найдены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса сильной устойчивости векторной линейной траекторной задачи дискретной оптимизации в случае чебышевской нормы в пространстве возмущающих параметров. Ранее аналогичные оценки для радиуса устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования были получены в [6].

Рассмотрим класс задач векторной дискретной оптимизации, описываемый следующей моделью. Пусть на множестве $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ задана векторная функция $a: E \rightarrow R^n, n > 1$. Тем самым можно считать, что функция $a(e)$

задается в виде матрицы $A = \{a_{ij}\}_{n \times m} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, где $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) = a(e_j)$, $j \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Далее, пусть на множестве элементов $T \subset 2^E \setminus \{\emptyset\}$, $|T| > 1$, называемых траекториями, задан векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_n(t, A)) \rightarrow \min_{t \in T},$$

частные критерии которого являются линейными функциями вида

$$f_i(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad i \in N_n,$$

где $N(t) = \{j \in N_m: e_j \in t\}$.

Под векторной (n -критериальной) траекторной задачей $Z^n(A)$ будем понимать задачу нахождения множества Парето

$$P(A) = \{t \in T: \pi(t, A) = \emptyset\},$$

где $\pi(t, A) = \{t \in T: f(t, A) \geq f(t', A), \quad f(t, A) \neq f(t', A)\}$.

Известно (см., например, [1–5, 7, 8]), что в схему скалярной траекторной задачи (при $n=1$) укладываются все задачи так называемой комбинаторной оптимизации с линейными критериями.

Следующее свойство траекторий очевидно.

Свойство α

$$\forall t \in P(A) \quad \forall t' \in \bar{P}(A) \quad \exists i \in N_n \quad (\tau_i(t, t', A) > 0),$$

где $\tau_i(t, t', A) = f_i(t, A) - f_i(t', A)$, $\bar{P}(A) = T \setminus P(A)$.

В пространстве $\mathbf{R}^{nm}$ зададим чебышевскую метрику, т.е. под нормой матрицы $B = \{b_{ij}\}_{n \times m}$ будем понимать число

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}|: (i, j) \in N_n \times N_m\}.$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество возмущающих матриц

$$\mathfrak{R}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm}: \|B\| \leq \varepsilon\}.$$

Пусть $A, B \in \mathbf{R}^{nm}$. Задачу $Z^n(A+B)$, полученную из исходной задачи $Z^n(A)$ при сложении матриц A и B , будем называть возмущенной, а матрицу B — возмущающей.

Радиусами устойчивости и сильной устойчивости задачи $Z^n(A)$ назовем соответственно числа

$$r^n(A) = \begin{cases} \sup Q_1(A), & \text{если } Q_1(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q_1(A) = \emptyset; \end{cases}$$

$$\rho^n(A) = \begin{cases} \sup Q_2(A), & \text{если } Q_2(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q_2(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$Q_1(A) = \{\varepsilon > 0: P(A+B) \subset P(A) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\},$$

$$Q_2(A) = \{\varepsilon > 0: P(A+B) \cap P(A) \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\}.$$

Очевидно, что

$$r^n(A) \leq \rho^n(A) \quad \forall A \in \mathbf{R}^{nm}. \quad (1)$$

Ясно, что в случае, когда $T = P(A)$, радиус сильной устойчивости (как и радиус устойчивости) бесконечен. Поэтому такой случай исключим из рассмотрения, а задачу $Z^n(A)$, для которой $\bar{P}(A) \neq \emptyset$, назовем нетривиальной.

Известно, что для радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z^n(A)$ справедлива формула (см. [3])

$$r^n(A) = \min_{t \in P(A)} \max_{t' \in \bar{P}(A)} \min_{i \in N_n} \Gamma_i(t, t', A), \quad (2)$$

где

$$\Gamma_i(t, t', A) = \frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')},$$

$$\Delta(t, t) = |t| + |t| - 2|t \cap t|.$$

Для нетривиальной задачи $Z^n(A)$ введем следующие обозначения

$$\varphi^n(A) = \min_{t \in P(A)} \max_{t \in P(A)} \min_{i \in N_n} \Gamma_i(t, t, A).$$

$$\psi^n(A) = \min_{t \in P(A)} \max_{t \in P(A)} \min_{i \in N_n} \Gamma_i(t, t, A).$$

Очевидно, что $\varphi^n(A) \leq \psi^n(A)$.

Теорема. Для радиуса сильной устойчивости векторной траекторной нетривиальной задачи $Z^n(A)$, $n > 1$, справедливы следующие оценки

$$0 < \varphi^n(A) \leq \rho^n(A) \leq \psi^n(A).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\varphi^n(A) > 0$. Действительно, согласно свойству α имеем

$$\forall t \in P(A) \quad \forall t \in \bar{P}(A) \quad \exists i \in N_n \quad (\tau_i(t, t, A) > 0).$$

Следовательно, получаем

$$\forall t \in P(A) \quad \forall t \in \bar{P}(A) \quad (\max\{\Gamma_i(t, t, A): i \in N_n\} > 0).$$

Далее докажем, что $\varphi^n(A) \leq \rho^n(A)$. Пусть $\varphi^n(A) > \varepsilon > 0$. Тогда существует такая траектория $t^0 \in P(A)$, что для любой траектории $t \in \bar{P}(A)$ выполняется неравенство

$$\max\{\Gamma_i(t, t^0, A): i \in N_n\} > \varepsilon.$$

Пусть $p \in \operatorname{argmax}\{\Gamma_i(t, t^0, A): i \in N_n\}$. Тогда имеем

$$\tau_p(t, t^0, A) > \varepsilon \Delta(t, t^0) > \|B\| \Delta(t, t^0) \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{R}(\varepsilon).$$

Отсюда выводим, что для любой траектории $t \in \bar{P}(A)$

$$\tau_p(t, t^0, A+B) > \tau_p(t, t^0, A) - \Delta(t, t^0) \max\{|b_{pj}|: j \in N_n\} \geq \tau_p(t, t^0, A) - \Delta(t, t^0) \|B\| > 0 \quad \forall B \in \mathcal{R}(\varepsilon).$$

Поэтому $\pi(t^0, A+B) \cap \bar{P}(A) = \emptyset$, т.е. $P(A) \cap P(A+B) \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{R}(\varepsilon)$.

Следовательно, $\varphi^n(A) \leq \rho^n(A)$.

Наконец, покажем, что $\rho^n(A) \leq \psi^n(A)$. Для этого достаточно доказать, что для любого числа $\varepsilon > \psi^n(A)$ существует такая матрица $B \in \mathcal{R}(\varepsilon)$, что $P(A) \cap P(A+B) = \emptyset$.

Пусть $\varepsilon > \psi^n(A)$. Тогда, согласно определению числа $\psi^n(A)$, имеем

$$\exists t \in \bar{P}(A) \quad \forall t \in P(A) \quad \forall i \in N_n \quad (\psi^n(A) > \Gamma_i(t, t, A)).$$

Поэтому, если в качестве возмущающей матрицы выберем матрицу с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} -\beta, & \text{если } i \in N_n, j \in N(t), \\ \beta, & \text{если } i \in N_n, j \in N(E \setminus \{t\}), \end{cases}$$

где $\psi^n(A) < \beta < \varepsilon$, то для любой траектории $t \in P(A)$ получаем $\tau_i(t, t, A+B) = \tau_i(t, t, A) + \tau_i(t, t, B) < \tau_i(t, t, A) - \Delta(t, t) \|B\| < \Delta(t, t) (\Gamma_i(t, t, A) - \psi^n(A)) \leq 0, \quad \forall i \in N_n$.

Тем самым доказано, что $\forall \varepsilon > \psi^n(A) \quad \exists B \in \mathcal{R}(\varepsilon) \quad (P(A) \cap P(A+B) = \emptyset)$, а значит, $\rho^n(A) \leq \psi^n(A)$.

Суммируя сказанное, убеждаемся в справедливости теоремы.

Приведем примеры, иллюстрирующие достижимость нижней и верхней оценок для радиуса сильной устойчивости.

Пример 1. Пусть $n=2, m=4, T=\{t_1, t_2, t_3, t_4\}, t_1=\{e_1\}, t_2=\{e_2\}, t_3=\{e_3\}, t_4=\{e_4\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда $P(A) = \{t_1, t_2\}$, $\varphi^2(A) = \frac{1}{2}$, $\psi^2(A) = \frac{3}{2}$.

Если $\frac{1}{2} < \beta < \varepsilon$, то $P(A+B) = \{t_3, t_4\}$,

где

$$B = \begin{pmatrix} \beta\beta - \beta - \beta \\ \beta\beta - \beta - \beta \end{pmatrix}$$

Следовательно, имеем

$$\forall \varepsilon > \frac{1}{2} \exists B \in \mathcal{R}(\varepsilon) (P(A) \cap P(A+B) = \emptyset).$$

Поэтому с учетом теоремы получаем $\rho^2(A) = \varphi^2(A) = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Пусть $n=2$, $m=4$, $T=\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $t_1=\{e_1\}$, $t_2=\{e_2\}$, $t_3=\{e_1, e_3\}$, $t_4=\{e_2, e_4\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1166 \\ 1123 \end{pmatrix}$$

Тогда $P(A)=\{t_1, t_2\}$, $\varphi^2(A)=2$, $\psi^2(A)=6$.

Пусть $\varepsilon < 6$. Тогда, согласно определению числа $\psi^-(A)$, существует такая траектория $t \in P(A)$ и такой индекс $i \in N_m$, что для всякой траектории $t \in \bar{P}(A)$ справедливы неравенства $\tau_i(t, t, A+B) > 0 \quad \forall B \in \mathcal{R}(\varepsilon)$, т.е. $P(A) \cap P(A+B) \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{R}(\varepsilon)$. Поэтому с учетом теоремы получаем $\rho^2(A) = \psi^2(A) = 6$.

Замечание 1. Легко понять, что достижимость оценок, проиллюстрированную примерами 1 и 2, можно доказать для любого числа критериев ($n > 2$).

Очевидно, что всякая устойчивая задача ($r^n(A) > 0$) является и сильно устойчивой ($\rho^n(A) > 0$).

Поскольку $\varphi^n(A) > 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{nm}$, то из теоремы выводим

Следствие 1 [9]. Всякая задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, сильно устойчива.

При переходе к скалярной задаче $Z^1(A)$ множество Парето $P(A)$ превращается во множество оптимальных решений. В этом контексте из теоремы с учетом соотношений (1) и (2) вытекает следующий известный результат

Следствие 2 [7]. Для любой задачи $Z^1(A)$ справедливо равенство $r^1(A) = \rho^1(A)$.

Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф97-266).

¹ Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев. 1995.

² Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. // Кибернетика и системный анализ. 1993. № 3. С. 78.

³ Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Кибернетика и системный анализ. 1995. № 4. С. 137.

⁴ Авсюкевич О.В., Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. // Изв. АН Беларуси Сер. физ.-мат. наук. 1998. № 1.

⁵ Подкопаев Д.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1998. № 2. С. 65.

⁶ Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 11. С. 1801.

⁷ Леонтьев В.К. // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169.

⁸ Он же. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 5. С. 1298.

⁹ Ефимчик Н.Е., Подкопаев Д.П. // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1995. № 3. С. 123 (Деп. в ВИНИТИ 26.12.1995. № 2799 В-94).

Поступила в редакцию 05.01.98.