Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 60–72
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2017. No. 3. P. 60–72

УДК 517.9

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ АССОЦИИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МЕРАМИ

А. Ю. РУСЕЦКИЙ [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрена задача Коши для стохастической дифференциальной системы уравнений с мерами. Исследована конечно-разностная с осреднением система стохастических дифференциальных уравнений с мерами, соответствующая исходной задаче Коши. Изучены стохастические интегральные системы уравнений, к решениям которых сходятся решения конечно-разностных с осреднением систем стохастических дифференциальных уравнений с мерами; описано пространство решений данной интегральной системы уравнений. Введено понятие ассоциированных решений задачи Коши стохастической дифференциальной системы уравнений с мерами. Доказана теорема существования и единственности ассоциированных решений. Кроме того, рассмотрена задача Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения высших порядков, а также исследованы ассоциированные решения задачи Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения высших порядков. Доказана теорема о представлении ассоциированных решений линейного стохастического дифференциального уравнения высших порядков через ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные системы с мерами; конечно-разностные с осреднением стохастические дифференциальные системы уравнений; теорема существования и единственности решения; ассоциированные решения; линейные стохастические дифференциальные уравнения высших порядков.

EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREM OF ASSOCIATED SOLUTIONS OF THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEM WITH MEASURES

A. Y. RUSETSKI [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The Cauchy problem for stochastic differential system with measures is considered in the paper. Finite-difference with averaging system of stochastic differential equations with correspondence to Cauchy problem is investigated. Stochastic integral equation system with the solution as a limit of the finite-difference with averaging system of stochastic differential equations is studied and also the space of the solutions is described. Moreover, the Cauchy problem associated solutions of the stochastic differential system with measures are defined. Existence and uniqueness theorem of the associated solutions is proved. Besides that, Cauchy problem for higher-order linear stochastic differential equation is considered. Associated solutions of the Cauchy problem are investigated. Also the theorem of the representation of the associated solutions of the higher-order linear stochastic differential equation with help of associated fundamental matrices of the correspondent homogeneous equation system is proved.

Key words: stochastic differential systems with measures; finite-difference with averaging stochastic differential systems; existence and uniqueness theorem; associated solutions; higher-order linear stochastic differential equations.

Образец цитирования:
Русецкий А. Ю. Теорема существования и единственности ассоциированных решений стохастической дифференциальной системы уравнений с мерами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 60–72.

For citation:
Rusetski A. Y. Existence and uniqueness theorem of associated solutions of the stochastic differential system with measures. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 60–72 (in Russ.).

Автор:
Артем Юрьевич Русецкий – аспирант кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. В. Лазакович.

Author:
Artsiom Y. Rusetski, postgraduate student at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
artyom.ruseckiy@gmail.com

Рассмотрим задачу Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений с мерами:

$$\begin{cases} X'(t,\,\omega) = L'(t)F\big(t,\,X(t,\,\omega)\big) + G(t)W'(t,\,\omega), \\ X(0,\,\omega) = X_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in T = [0,\,b]$, $\omega \in \Omega$,

$$X(t,\,\omega) = \big(X_i(t,\,\omega)\big)^T,\ X_0 = \big(X_0^i\big)^T \in \mathbb{R}^p,\ i = \overline{1,\,p};$$

$$L'(t) = \big(l'_{ij}(t)\big),\ F(x,\,y) = \big(f_j(x,\,y)\big)^T \in \mathbb{R}^q,\ i = \overline{1,\,p},\ j = \overline{1,\,q},$$

где $l_{ij} : T \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\,p}$, $j = \overline{1,\,q}$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации; $f_j : T \times \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,\,q}$, – липшицевы функции по второй переменной;

$$G(t) = \big(g_{ij}(t)\big),\ W'(t,\,\omega) = \big(w'_j(t,\,\omega)\big)^T \in \mathbb{R}^q,\ i = \overline{1,\,p},\ \ j = \overline{1,\,q},$$

где $g_{ij}(t) \in L_2(T)$, $i = \overline{1,\,p}$, $j = \overline{1,\,q}$; $w_j(t,\,\omega)$, $j = \overline{1,\,q}$, – винеровские процессы.

Производные функций понимаются в обобщенном смысле.

Данная задача является некорректной в рамках классической теории дифференциальных уравнений, поскольку в уравнениях могут присутствовать произведения обобщенных функций.

Стохастические дифференциальные уравнения вида (1) могут быть использованы в качестве моделей в различных областях физики и техники. Например, в механике, если рассмотреть уравнение движения маятника под действием силы тяжести и силы молекулярного воздействия окружающего его газа [1]. Уравнения такого вида могут применяться также в качестве моделей пространственного движения летательного аппарата с учетом управляющего и возмущающего воздействий [2].

Кроме того, системы дифференциальных уравнений вида (1) находят широкое применение в качестве моделей, описывающих динамику финансовых данных [3].

Будем трактовать систему (1) в смысле конечно-разностной с осреднением. Обоснование данной трактовки связано с работами Гаусса об ошибках измерений [4]. В данном подходе находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях этой точки и объявить предел последовательности этих средних значений значением рассматриваемой физической величины в данной точке [5, с. 15]. Таким образом, задача Коши примет следующий вид:

$$\begin{cases} X_n(t + h_n,\,\omega) - X_n(t,\,\omega) = \big(L_n(t + h_n) - L_n(t)\big)F_n\big(t,\,X_n(t,\,\omega)\big) + \\ + G_n(t)\big(W_n(t + h_n,\,\omega) - W_n(t,\,\omega)\big), \\ X_n(t,\,\omega)\big|_{[0,\,h_n)} = X_n^0(t,\,\omega), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$X_n(t,\,\omega) = \big(X_n^i(t,\,\omega)\big)^T,\ X_n^0(t,\,\omega) = \big(X_{n0}^i(t,\,\omega)\big)^T,\ i = \overline{1,\,p};$$

$$L_n(t) = \big(l_n^{ij}(t)\big),\ F_n(x,\,y) = \big(f_n^j(x,\,y)\big)^T,\ i = \overline{1,\,p},\ j = \overline{1,\,q},$$

где $l_n^{ij}(t) = \big(l_{ij} * \rho_n^{ij}\big)(t)$, $\rho_n^{ij}(t) = \gamma_{ij}(n)\rho\big(\gamma_{ij}(n)t\big)$, где $\gamma_{ij}(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $i = \overline{1,\,p}$, $j = \overline{1,\,q}$;

$$\rho \geq 0,\ \rho \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \mathrm{supp}(\rho) \subseteq [0,\,1],\ \int_0^1 \rho(s)\,ds = 1;$$

$$G_n(t) = \big(g_n^{ij}(t)\big),\ \ W_n(t,\,\omega) = \big(w_n^i(t,\,\omega)\big)^T,\ i = \overline{1,\,p},\ \ j = \overline{1,\,q}.$$

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0,\,h_n)$; $m_t \in \mathbb{N}$. Обозначим $t_k = \tau_t + kh_n$, $k = 1,\,\ldots,\,m_t - 1$.

Решение системы (2) можно записать в виде

$$X_n(t, \omega) = X_n(\tau_t, \omega) + \sum_{k=0}^{m_t-1} \Big(L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)\Big) F_n\big(t_k, X_n(t_k, \omega)\big) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m_t-1} G_n(t_k)\Big(W_n(t_{k+1}, \omega) - W_n(t_k, \omega)\Big). \tag{3}$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$X(t, \omega) = X_0 + \int_0^t dL^c(s) F\big(s, X(s, \omega)\big) + \sum_{\mu_l \le t} \Psi\big(\mu_l, X(\mu_l-, \omega), \Delta L(\mu_l)\big) +$$

$$+ \int_0^t G(s)\, dW(s, \omega),\ t \in T,\ \omega \in \Omega, \tag{4}$$

где

$$X(t, \omega) = \big(X_i(t, \omega)\big)^T,\ X_0 = \big(X_0^i\big)^T \in \mathbb{R}^p,\ i = \overline{1, p};$$

$$L(t) = \big(l_{ij}(t)\big),\ F(x, y) = \big(f_j(x, y)\big)^T \in \mathbb{R}^q,\ i = \overline{1, p},\ j = \overline{1, q},$$

где $l_{ij} : T \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации; $f_j : T \times \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, q}$.

$$\Psi(x, y, z) = \big(\Psi_i(x, y, z)\big)^T,\ i = \overline{1, p},$$

где $\Psi_i : T \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p \times q} \to \mathbb{R}$;

$$G(t) = \big(g_{ij}(t)\big),\ W(t, \omega) = \big(w_j(t, \omega)\big)^T \in \mathbb{R}^q,\ i = \overline{1, p},\ j = \overline{1, q},$$

где $g_{ij}(t) \in L_2(T)$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$; $w_j(t, \omega)$, $j = \overline{1, q}$, – винеровские процессы; $L^c(t)$ – непрерывная часть функции $L(t)$, а $\Delta L(\mu_l) = L(\mu_l) - L(\mu_l -)$, где μ_l, $l \in \mathbb{N}$, – точки разрыва $L(t)$.

Пространство непрерывных справа, имеющих предел слева случайных процессов

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – полное вероятностное пространство.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{H}$ случайных величин ξ, $E\|\xi\| < \infty$, где $\|\cdot\|$ – произвольная норма в $\mathbb{R}^n$, со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\overline{\xi_2}$ и среднеквадратичной нормой $\|\xi\|_{\mathbb{H}} = \left(E\|\xi\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, которое является полным, а именно всякая фундаментальная последовательность величин сходится.

В данном пространстве $\mathbb{H}$ две случайные величины являются тождественными, если они равны с вероятностью 1.

Случайный процесс описывается функцией $\xi(t)$, $t \in T$, действительного переменного t (времени), пробегающего некоторое множество $T \subseteq \mathbb{R}$ на действительной прямой, а значения этой функции – случайные величины $\xi(t)$, описывающие состояние процесса в соответствующий момент времени t. При условии, что $E\|\xi\| < \infty$, можно рассматривать $\xi(t)$, $t \in T$, как функцию в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, т. е. функцию со значениями $\xi(t) \in \mathbb{H}$.

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$, непрерывен в среднеквадратичном в точке s, когда

$$\lim_{t \to s} \|\xi(t) - \xi(s)\|_{\mathbb{H}} = 0.$$

Рассмотрим функции в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, заданные на отрезке $T = [0, b]$, которые непрерывны справа в среднеквадратичном и имеют предел слева. Зададим норму на пространстве случайных процессов $\mathbb{X}$.

$$\left\|X(t,\omega)\right\| = \sup_T \left(E\left\|X(t,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Символом $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ будем обозначать норму в пространстве $\mathbb{X}$, т. е. $\sup_T \left(E\|\cdot\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Покажем, что данное нормированное пространство случайных процессов $\mathbb{X}$ является полным.

Утверждение. Пространство $\mathbb{X}$ непрерывных справа в среднеквадратичном и имеющих предел слева случайных процессов с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ является полным.

Доказательство. Пусть $x_n(t,\omega)$ – последовательность Коши в пространстве $\mathbb{X}$. Это эквивалентно тому, что $\forall \varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$, выполняется

$$\sup_T \left(E\left\|x_n(t,\omega) - x_m(t,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon. \tag{5}$$

Зафиксируем точку $t \in T$. Для $n, m \geq n(\varepsilon)$, имеем $\left(E\left\|x_n(t,\omega) - x_m(t,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, т. е. последовательность случайных величин $x_n(t)$ является последовательностью Коши и в силу полноты пространства $\mathbb{H}$ сходится. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n(t,\omega) = x_0(t,\omega)$. Таким образом, последовательность $x_n(t,\omega)$ точечно сходится к $x_0(t,\omega)$.

В неравенстве (5) перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получаем, что для $n \geq n(\varepsilon)$ выполняется $\sup_T \left(E\left\|x_n(t,\omega) - x_0(t,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$, т. е. последовательность x_n сходится в смысле нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. Существование предела слева следует из поточечной сходимости x_n. Покажем, что x_0 есть непрерывный справа случайный процесс. Пусть $t_0 \in \mathbb{T}$. По $\varepsilon > 0$ выберем n_1 так, что выполнено $\sup_T \left(E\left\|x_{n_1}(t,\omega) - x_0(t,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$ $\leq \frac{\varepsilon}{3}$, также выберем $\delta > 0$ так, что из $|t - t_0| \leq \delta$ и $t < t_0$ следует $\left(E\left\|x_{n_1}(t,\omega) - x_{n_1}(t_0,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для t таких, что $|t - t_0| \leq \delta$ и $t < t_0$, выполнено неравенство

$$\left(E\left\|x_0(t,\omega) - x_0(t_0,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(E\left\|x_0(t,\omega) - x_{n_1}(t,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(E\left\|x_{n_1}(t,\omega) - x_{n_1}(t_0,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(E\left\|x_{n_1}(t_0,\omega) - x_0(t_0,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon,$$

из которого следует среднеквадратичная непрерывность справа случайного процесса x_0 в точке t_0.

Теорема существования и единственности решения стохастической интегральной системы уравнений

Теорема 1. *Пусть функции* $F(t,x)$ *и* $\Psi(t,x,u)$ *– борелевские по* (t,x) *и для любых* $x, y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $t \in T$ *эти функции удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста:*

$$\left\|F(t,x) - F(t,y)\right\| \leq h_1(t)\|x - y\|,$$

$$\left\|F(t,x)\right\| \leq h_2(t)\left(1 + \|x\|\right),$$

$$\sup_T \left\|F(t,0)\right\| < \infty,$$

$$\left\|\Psi(t,x,u) - \Psi(t,y,u)\right\| \leq h_3(t)\|x - y\|,$$

$$\left\|\Psi(t,\, x,\, u)\right\| \le h_2(t)\|u\|\left(1+\|x\|\right),$$

где для $i=\overline{1,\,4}$

$$\int_0^b h_i^2(s)\,dVarL(s) < \infty.$$

Тогда $\forall$ *начального условия* $X\left(t_0-,\, \omega\right) = X_0$, *для почти всех* $\omega \in \Omega$ *решение уравнения (4) существует и единственно в пространстве непрерывных справа и имеющих предел слева случайных процессов с нормой*

$$\left\|X(t,\, \omega)\right\|_{\mathbb{X}} = \sup_T\left(E\left\|X(t,\, \omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\Phi\left(X(t,\, \omega)\right) = X_0 + \int_0^t F\left(s,\, X(s,\, \omega)\right)dL^c(s) + \sum_{\mu_l \le t}\Psi\left(\mu_l,\, X(\mu_l-,\, \omega),\, \Delta L(\mu_l)\right) + \int_0^t G(s)\,dW(s,\, \omega),$$

действующее на определенном нами пространстве случайных процессов $\mathbb{X}$. Покажем, что образ отображения $\Phi(\cdot)$ лежит в $\mathbb{X}$. Для этого докажем, что $\forall X(t,\, \omega) \in \mathbb{X}$, $\Phi\left(X(t,\, \omega)\right) \in \mathbb{X}$.

Очевидно, что образ отображения – непрерывная справа, имеющая предел слева функция, так как интегралы и сумма являются такими функциями.

Покажем, что $\left\|\Phi\left(X(t,\, \omega)\right)\right\|_{\mathbb{X}} < \infty$, $\forall X(t,\, \omega) \in \mathbb{X}$.

$$\left\|\Phi\left(X(t,\, \omega)\right)\right\|_{\mathbb{X}} =$$

$$= \sup_T\left(E\left\|X_0 + \int_0^t dL^c(s)F\left(s,\, X(s,\, \omega)\right) + \sum_{\mu_l \le t}\Psi\left(\mu_l,\, X(\mu_l-,\, \omega),\, \Delta L(\mu_l)\right) + \int_0^t G(s)\,dW(s,\, \omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sup_T\left(E\left\|X_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sup_T\left(E\left\|\int_0^t dL^c(s)f\left(s,\, X(s,\, \omega)\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sup_T\left(E\left\|\sum_{\mu_l \le t}\Psi\left(\mu_l,\, X(\mu_l-,\, \omega),\, \Delta L(\mu_l)\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sup_T\left(E\left\|\int_0^t g(s)\,dB(s,\, \omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. $\sup\limits_{[0,\, T]}\left(E\left\|X_0\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|X_0\right\| < \infty.$

2. $\sup\limits_T\left(E\left\|\int_0^t dL^c(s)F\left(s,\, X(s,\, \omega)\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sup\limits_T\left(E\left|\int_0^t \left\|F\left(s,\, X(s,\, \omega)\right)\right\| dVarL^c(s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sup\limits_T\left(E\left|\int_0^t h_2(s)\left(1 + \right.\right.\right.$

$\left.\left.\left. + \left\|X(s,\, \omega)\right\|\right)dVarL^c(s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$ (неравенство Гёльдера: $\forall x(\omega) \in \mathbb{H}$ и $y(\omega) \in \mathbb{H}$ справедливо неравенство

$\left|\int_T x(s)y(s)\,d\mu(s)\right| \le \left(\int_T x^2(s)\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_T y^2(s)\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}}$, где $\mu(s)$ – конечная мера на T; $x(t)$ и $y(t)$ – произвольные, квадратично интегрируемые функции по мере μ) $\le$

$$\le \sup_T\left(E\int_0^t h_2^2(s)\,dVarL^c(s)\int_0^t\left(1 + \left\|X(s,\, \omega)\right\|\right)^2 dVarL^c(s)\right)^{\frac{1}{2}} \le \text{ (теорема Фубини) } \le$$

$$\le \left(\int_0^b h_2^2(s)\,dVarL^c(s)\right)^{\frac{1}{2}} \sup_T\left(\int_0^t E\left(1+\left\|X(s,\,\omega)\right\|\right)^2 dVarL^c(s)\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\int_0^b h_2^2(s)\,dVarL^c(s)VarL^c(b)\right)^{\frac{1}{2}} \sup_T\left(E\left(1+\left\|X(s,\,\omega)\right\|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

3. $\sup_T\left(E\left\|\sum_{\mu_l\le t}\Psi\left(\mu_l,\,X(\mu_l-,\,\omega),\,\Delta L(\mu_l)\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sup_T\left(E\left|\sum_{\mu_l\le t}\left\|\Psi\left(\mu_l,\,X(\mu_l-,\,\omega),\,\Delta L(\mu_l)\right)\right\|\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$

$\le \sup_T\left(E\left|\int_0^t h_4(s)\left(1+\left\|X(s-,\,\omega)\right\|\right)dVarL(s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$

4. $\sup_T\left(E\left\|\int_0^t g(s)\,dB(s,\,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sup_T\int_0^t \left\|g(s)\right\|^2 ds <$ (так как $\left(g_{ij}(t)\in L_2(T),\ i=\overline{1,\,p},\ j=\overline{1,\,q}\right)$) $< \infty$.

Из этого следует, что $\Phi(\cdot):\mathbb{X}\to\mathbb{X}$.

Покажем, что некоторая степень отображения $\Phi(\cdot)$ является сжимающей.

Пусть $X_1,\,X_2\in\mathbb{X}$, тогда

$$\Phi^n(X_1) = X_0 + \int_0^t dL^c(s_1)\,F\left(s,\,\Phi^{n-1}\left(X_1(s_1,\,\omega)\right)\right) +$$

$$+\sum_{s_1\le t}\Psi\left(s_1,\,\Phi^{n-1}\left(X_1(s_1-,\,\omega)\right),\ \Delta L(s_1)\right) + \int_0^t G(s_1)\,dW(s_1,\,\omega).$$

$$\rho\left(\Phi^n(X_1),\,\Phi^n(X_2)\right) = \sup_T\left(E\left\|\Phi^n(X_1)-\Phi^n(X_2)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sup_T\left(E\left\|\int_0^t dL^c(s_1)\left(F\left(s,\,\Phi^{n-1}\left(X_1(s_1,\,\omega)\right)\right)-F\left(s,\,\Phi^{n-1}\left(X_2(s_1,\,\omega)\right)\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s_1\le t}\left(\Psi\left(s_1,\,\Phi^{n-1}\left(X_1(s_1-,\,\omega)\right),\,\Delta L(s_1)\right)-\Psi\left(s_1,\,\Phi^{n-1}\left(X_2(s_1-,\,\omega)\right),\,\Delta L(s_1)\right)\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sup_T\left(E\left|\int_0^t \left\|F\left(s,\,\Phi^{n-1}\left(X_1(s_1,\,\omega)\right)\right)-F\left(s,\,\Phi^{n-1}\left(X_2(s_1,\,\omega)\right)\right)\right\|dVarL^c(s_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s_1\le t}\left\|\Psi\left(s_1,\,\Phi^{n-1}\left(X_1(s_1-,\,\omega)\right),\,\Delta L(s_1)\right)-\Psi\left(s_1,\,\Phi^{n-1}\left(X_2(s_1-,\,\omega)\right),\,\Delta L(s_1)\right)\right\|\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sup_T\left(E\left|\int_0^t h_1(s_1)\left\|\Phi^{n-1}\left(X_1(s_1,\,\omega)\right)-\Phi^{n-1}\left(X_2(s_1,\,\omega)\right)\right\|dVarL^c(s_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s_1\le t}h_3(s_1)\left\|\Delta L(s_1)\right\|\left\|\Phi^{n-1}\left(X_1(s_1-,\,\omega)\right)-\Phi^{n-1}\left(X_2(s_1-,\,\omega)\right)\right\|\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq \sup_T \left(E \left| \int_0^t \left\| \Phi^{n-1}\left(X_1(s_1, \omega)\right) - \Phi^{n-1}\left(X_2(s_1, \omega)\right) \right\| dM(s_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $M(t)$ – финитная неубывающая функция ограниченной вариации, допускающая разложение $M(t) = M^c(t) + M^d(t)$, $M(0) = 0$, с $dM^c(t) = h_1(t) dVarL^c(t)$, $dM^d(t) = h_3(t) \left\| \Delta L(s_1) \right\|$.

$$\sup_T \left(E \left| \int_0^t \left\| \Phi^{n-1}\left(X_1(s_1, \omega)\right) - \Phi^{n-1}\left(X_2(s_1, \omega)\right) \right\| dM(s_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sup_T \left(E \left| \int_0^t \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_{n-1}} \left\| X_1(s_n, \omega) - X_2(s_n, \omega) \right\| dM(s_n), \ldots, dM(s_2) dM(s_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \text{(неравенство Гёльдера)} \leq$$

$$\leq \sup_T \left(E \int_0^t \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_{n-1}} \left\| X_1(s_n, \omega) - X_2(s_n, \omega) \right\|^2 dM(s_n), \ldots, dM(s_2) dM(s_1) \right)^{\frac{1}{2}} \left(M(b)\right)^{\frac{n}{2}} \leq$$

$$\leq \text{(теорема Фубини)} \leq$$

$$\leq \sup_T \left(\int_0^t \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_{n-1}} E \left\| X_1(s_n, \omega) - X_2(s_n, \omega) \right\|^2 dM(s_n), \ldots, dM(s_2) dM(s_1) \right)^{\frac{1}{2}} \left(M(b)\right)^{\frac{n}{2}} \leq$$

$$\leq \sup_T \left(E \left\| X_1(s_n, \omega) - X_2(s_n, \omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(M(b)\right)^{\frac{n}{2}} \sup_T \left(\int_0^t \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_{n-1}} dM(s_n), \ldots, dM(s_2) dM(s_1) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \rho(X_1, X_2) \left(M(b)\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\left(M(b)\right)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} = \rho(X_1, X_2) \left(\frac{\left(M(b)\right)^{2n}}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Существует n_1 такое, что данное выражение будет меньше единицы, для любых $n \geq n_1$, поэтому некоторая степень отображения $\Phi(\cdot)$ является сжимающей.

По теореме о сжимающих отображениях существует единственная неподвижная точка отображения $\Phi(\cdot)$ в пространстве $\mathbb{X}$, следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение в этом пространстве.

Данная теорема является естественным обобщением теоремы из работы [6, с. 392] для обыкновенных дифференциальных систем с мерами.

Следствие 1. *При выполненных условиях из теоремы 1 решение уравнения (4) существует и единственно в пространстве непрерывных справа и имеющих предел слева случайных процессов с нормой*

$$\left\| X(t, \omega) \right\|_{\mathbb{X}'} = \int_T \left(E \left\| X(t, \omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Существование и единственность решения в пространстве $\mathbb{X}'$ следует из теоремы 1 и того, что $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ сильнее, чем $\|\cdot\|_{\mathbb{X}'}$.

Теорема 2. *Пусть функция $F(t, x)$ – борелевская по (t, x) и для любых $x, y \in \mathbb{R}^p$, $t \in T$ функция удовлетворяет условиям Липшица и линейного роста:*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq h_1(t)\|x - y\|,$$
$$\|F(t, x)\| \leq h_2(t)(1 + \|x\|),$$
$$\sup_T \|F(t, 0)\| < \infty,$$

где для $i = 1, 2$

$$\int_0^b h_i^2(s)\, dVarL(s) < \infty.$$

Пусть $X_n(t, \omega)$ *– решение (3) конечно-разностной с осреднением задачи Коши (2) и*

$$\sup_{t \in [0, h_n)} E\left\|X_n^0(t, \omega) - X_0\right\|^2 \xrightarrow[n \to \infty,\ h_n \to 0]{} 0.$$

Предположим, что $X(t, \omega)$ *является решением интегральной системы уравнений (4), где*

$$\Psi(\mu, x, L) = \varphi(1, \mu, x, L) - \varphi(0, \mu, x, L),$$

где $\varphi(u, \mu, x, L) : \{0, 1\} \times T \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p \times q} \to \mathbb{R}^p$ *находится из уравнения*

$$\varphi(u, \mu, x, L) = X_0 + L\int_0^u d\eta(s) F(\mu, \varphi(s, \mu, x, L)), \tag{6}$$

где

$$\eta(s) = (\eta_{ij}(s)),$$

где $\eta_{ij} : D = [0, 1] \to \mathbb{R}$ *– непрерывная справа функция ограниченной вариации.*

Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $\frac{1}{\gamma_{ij}(n)} = o(h_n)$ *или* $h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_{ij}(n)}\right)$ *для всех* $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$,

$$\int_T \left(E\left\|X_n(t, \omega) - X(t, \omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \to 0,$$

где $\eta_{ij}(s) = s$, *если* $h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_{ij}(n)}\right)$ *и* $\eta_{ij}(s) = H(s-1)$, *если* $\frac{1}{\gamma_{ij}(n)} = o(h_n)$, *где* $H(s)$ *– функция Хевисайда.*

Существование и единственность решения системы интегральных уравнений (6) вытекают из следствия 1.

Определение. Ассоциированными решениями задачи Коши (1) в пространстве $\mathbb{X}'$ называются решения системы интегральных уравнений (4), где $\Psi(\mu, x, L) = \varphi(1, \mu, x, L) - \varphi(0, \mu, x, L)$, а $\varphi(u, \mu, x, L) : \{0, 1\} \times T \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p \times q} \to \mathbb{R}^p$ находится из уравнения (6), где $\eta_{ij}(s) = s$, если $h_n = o\left(\frac{1}{\gamma_{ij}(n)}\right)$, и $\eta_{ij}(s) = H(s-1)$, если $\frac{1}{\gamma_{ij}(n)} = o(h_n)$.

Корректность определения 1 следует из теорем 1 и 2.

Линейные стохастические дифференциальные уравнения высших порядков

Рассмотрим задачу Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y^{(p)}(t, \omega) = a_p'(t) y^{(p-1)}(t, \omega) + \ldots + a_2'(t) y'(t, \omega) + a_1'(t) y(t, \omega) + g(t) w'(t, \omega), \\ y^{(p-1)}(0, \omega) = y_0^p, \\ \ldots \\ y(0, \omega) = y_0^1, \end{cases} \tag{7}$$

где $t \in T$, $\omega \in \Omega$, $y_i^0 \in \mathbb{R}$, $a_i : T \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,\, p}$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации; $w(t,\, \omega)$ – винеровский процесс; $a_i'(t)$, $i = \overline{1,\, p}$, $w'(t,\, s)$ – их обобщенные производные, $g(t) \in L_2(T)$.

При моделировании процентных ставок в финансовой математике используются уравнения, решения которых есть марковские процессы, в то время как реальные финансовые данные часто не являются такими процессами. Это заключение было сделано в силу того, что корреляционные функции реальных финансовых данных могут принимать отрицательные значения [7]. Случайные процессы с такими свойствами могут быть смоделированы с помощью стохастических дифференциальных уравнений вида (7).

Используя формальные обозначения $X_i(t,\, \omega) = y^{(i)}(t,\, \omega)$, $i = \overline{1,\, p}$, получим следующую систему, эквивалентную (7):

$$\begin{cases} X'(t,\, \omega) = L'(t) X(t,\, \omega) + G(t) W'(t,\, \omega), \\ X(0,\, \omega) = X_0, \end{cases} \tag{8}$$

где $t \in T = [0,\, b]$, $\omega \in \Omega$,

$$X(t,\, \omega) = \left(X_i(t,\, \omega)\right)^T,\ X_0 = \left(y_0^i\right)^T \in \mathbb{R}^p,\ i = \overline{1,\, p};$$

$$W'(t,\, \omega) = \left(W_i'(t,\, \omega)\right)^T \in \mathbb{R}^p,$$

где $W_i'(t,\, \omega) = 0$, $i = \overline{1,\, p-1}$; $W_p'(t,\, \omega) = w'(t,\, \omega)$;

$$L'(t) = \left(L_{ij}'(t)\right),$$

где $L_{ij}'(t) = 1$ при $i = j - 1$; $L_{ij}'(t) = 0$ при $i \neq j - 1$, если $i = \overline{1,\, p-1}$, $j = \overline{1,\, p}$ и $L_{pj}'(t) = -a_j'(t)$;

$$G(t) = \left(G_{ij}(t)\right),$$

где $G_{ij}(t) = 0$, если $i = \overline{1,\, p-1}$, $j = \overline{1,\, p}$ или $i = p$, $j = \overline{1,\, p-1}$ и $G_{pp}(t) = g(t)$.

Задача Коши (8) является частным случаем системы (1).

Конечно-разностная с осреднением система уравнений, соответствующая задаче Коши (8), будет иметь вид

$$\begin{cases} X_n(t + h_n,\, \omega) - X_n(t,\, \omega) = \left(L_n(t + h_n) - L_n(t)\right) X_n(t,\, \omega) + G_n(t)\left(W_n(t + h_n,\, \omega) - W_n(t,\, \omega)\right), \\ X_n(t,\, \omega)\big|_{[0,\, h_n)} = X_n^0(t,\, \omega), \end{cases} \tag{9}$$

где

$$X_n(t,\, \omega) = \left(X_n^i(t,\, \omega)\right)^T,\ X_n^0(t,\, \omega) = \left(X_{n0}^i(t,\, \omega)\right)^T,\ i = \overline{1,\, p},$$

$$W_n(t,\, \omega) = \left(W_n^i(t,\, \omega)\right)^T,$$

где $W_n^i(t,\, \omega) = 0$, $i = \overline{1,\, p-1}$ и $W_n^p(t,\, \omega) = w_n(t,\, \omega)$;

$$G_n(t) = \left(G_n^{ij}(t)\right),$$

где $G_n^{ij}(t) = 0$, если $i = \overline{1,\, p-1}$, $j = \overline{1,\, p}$ или $i = p$, $j = \overline{1,\, p-1}$, и $G_n^{pp}(t) = g_n(t)$;

$$L_n(t) = \left(L_n^{ij}(t)\right),$$

где $L_n^{ij}(t) = 1$ при $i = j - 1$ и $L_n^{ij}(t) = 0$ при $i \neq j - 1$, если $i = \overline{1,\, p-1}$, $j = \overline{1,\, p}$ и $L_n^{pj}(t) = -a_n^j(t)$;

$$a_n^j(t) = \left(a_j * \rho_n^j\right)(t),\ \rho_n^j(t) = \gamma_j(n)\rho\left(\gamma_j(n)t\right),$$

где $\gamma_j(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $j = \overline{1,\, p}$,

$$\rho \geq 0,\ \rho \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ \mathrm{supp}(\rho) \subseteq [0,1],\ \int_0^1 \rho(s)ds = 1.$$

Таким образом, справедливо следующее следствие из теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть* $X_n(t,\omega)$ *– решение конечно-разностной с осреднением задачи Коши (9) и*

$$\sup_{t\in[0,h_n)} E\left\|X_n^0(t,\omega) - X_0\right\|^2 \xrightarrow[n\to\infty,\ h_n\to 0]{} 0.$$

Тогда при $n\to\infty,\ h_n\to 0$ *так, что* $\dfrac{1}{\gamma_j(n)} = o(h_n)$ *или* $h_n = o\left(\dfrac{1}{\gamma_j(n)}\right)$ *для всех* $j=\overline{1,\ p}$,

$$\int_T \left(E\left\|X_n(t,\omega) - X(t,\omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \to 0,$$

где $X(t,\omega)$ *– решение следующей интегральной системы уравнений:*

$$X(t,\omega) = X_0 + \int_0^t dL^c(s)X(s,\omega) + \sum_{\mu_l\leq t} \Delta L^k(\mu_l)X(\mu_l-,\omega) + \int_0^t G(s)dW(s,\omega),\ t\in T,\ \omega\in\Omega, \tag{10}$$

где $L^c(t)$ *– непрерывная часть функции* $L(t)$; $\mu_l,\ l\in\mathbb{N}$, *– точки разрыва* $L(t)$.

$$\Delta L^k(t) = \left(\Delta L_{ij}^k(t)\right),\ k=\overline{1,\ 2^p},$$

где $\Delta L_{ij}^k(t) = 0$ *при* $i=\overline{1,\ p-1},\ j=\overline{1,\ p}$.

Если $\dfrac{1}{\gamma_p(n)} = o(h_n)$, *то*

$$\Delta L_{pj}^k(t) = \begin{cases} -\Delta a_p(\mu_l),\ j=p, \\ -\Delta a_j(\mu_l),\ \text{если}\ \dfrac{1}{\gamma_j(n)} = o(h_n),\ j=\overline{1,\ p-1}, \\ -\Delta a_j(\mu_l)\left(1-\Delta a_p(\mu_l)\right),\ \text{если}\ h_n = o\left(\dfrac{1}{\gamma_j(n)}\right),\ j=\overline{1,\ p-1}. \end{cases}$$

Если $h_n = o\left(\dfrac{1}{\gamma_p(n)}\right)$, *то*

$$\Delta L_{pj}^k(t) = \begin{cases} e^{-\Delta a_p(\mu_l)} - 1,\ j=p, \\ -\Delta a_j(\mu_l),\ \text{если}\ \dfrac{1}{\gamma_j(n)} = o(h_n),\ j=\overline{1,\ p-1}, \\ \dfrac{\Delta a_j(\mu_l)}{\Delta a_p(\mu_l)}\left(e^{-\Delta a_p(\mu_l)} - 1\right),\ \text{если}\ h_n = o\left(\dfrac{1}{\gamma_j(n)}\right),\ j=\overline{1,\ p-1} \end{cases}$$

при условии, что $\Delta a_p(\mu_l) \neq 0$. *Если же* $\Delta a_p(\mu_l) = 0$, *то*

$$\Delta L_{ij}^k(t) = \begin{cases} 0,\ i=\overline{1,\ p-1},\ j=\overline{1,\ p}, \\ -\Delta a_j(\mu_l),\ i=p,\ j=\overline{1,\ p}, \end{cases}\quad k=\overline{1,2^p}.$$

Рассмотрим задачу Коши для однородного дифференциального уравнения, соответствующего задаче (8), т. е. при $g(t)=0$:

$$\begin{cases} X'(t)=L'(t)X(t), \\ X(0)=X_0, \end{cases} \tag{11}$$

где $t\in T=[0,\,b]$.

Уравнения вида (11) исследовались в работах [8; 9].

Пусть $B^k(t,\,s)$ – ассоциированные фундаментальные матрицы системы (11), $k=\overline{1,\,2^p}$ [10].

Теорема 3. *Ассоциированные решения системы (7) представимы в виде*

$$X^k(t,\,\omega)=B^k(t,\,0)X_0+\int_0^t B^k(t,\,s)G(s)dW(s,\,\omega),\ t\in T,\ k=\overline{1,\,2^p},$$

для почти всех $\omega\in\Omega$, *где* $B^k(t,\,s)$, $k=\overline{1,\,2^p}$, *– ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующей однородной системы (11).*

Доказательство. Из следствия 2 получаем, что ассоциированными решениями задачи Коши (7) являются решения соответствующих интегральных уравнений (10).

Введем обозначение $L^k(t)=L^c(t)+\Delta L^k(t)$. Перепишем уравнение (10) следующим образом:

$$X(t,\,\omega)=X_0+\int_0^t dL^k(s)X(s,\,\omega)+\int_0^t G(s)dW(s,\,\omega),\ t\in T,\ \omega\in\Omega, \tag{12}$$

где интеграл по $L^k(t)$ понимается как неклассический интеграл Римана – Стилтьеса [11, с. 48].

Подставим предполагаемое решение в соответствующее интегральное уравнение:

$$B^k(t,\,0)X^k(0,\,\omega)+\int_0^t B^k(t,\,s)G(s)dW(s,\,\omega)=$$

$$=X^k(0,\,\omega)+\int_0^t dL^k(s)\left(B^k(s,\,0)X^k(0,\,\omega)+\int_0^s B^k(s,\,r)G(r)dW(r,\,\omega)\right)+\int_0^t G(s)dW(s,\,\omega).$$

Поскольку $B^k(t,\,0)X_0$ является ассоциированным решением однородного дифференциального уравнения (11) [10, теорема 4],

$$B^k(t,\,0)X^k(0,\,\omega)=X^k(0,\,\omega)+\int_0^t dL^k(s)B^k(s,\,0)X^k(0,\,\omega).$$

Отсюда получим

$$\int_0^t B^k(t,\,s)G(s)dW(s,\,\omega)=\int_0^t dL^k(s)\int_0^s B^k(s,\,r)G(r)dW(r,\,\omega)+\int_0^t G(s)dW(s,\,\omega).$$

Распишем фундаментальную матрицу по определению

$$B^k(t,\,r)=E+\int_r^t dL^k(s)B^k(s,\,r).$$

Подставляя определение в правую часть, получим

$$\int_0^t\left(E+\int_s^t dL^k(r)B^k(r,\,s)\right)G(s)dW(s,\,\omega)=\int_0^t dL^k(s)\int_0^s B^k(s,\,r)G(r)dW(r,\,\omega)+\int_0^t G(s)dW(s,\,\omega).$$

В итоге придем к следующему равенству:

$$\int_0^t\int_s^t dL^k(r)B^k(r,\,s)G(s)dW(s,\,\omega)=\int_0^t dL^k(s)\int_0^s B^k(s,\,r)G(r)dW(r,\,\omega).$$

Положим, что

$$B^k(t, s) = \begin{cases} B^k(t, s), \ t > s, \\ 0, \ t \le s. \end{cases}$$

$$W_1 = \int_0^t dL^k(s) \int_0^s B^k(s, r) G(r) dW(r, \omega),$$

$$W_2 = \int_0^t \int_0^t dL^k(r) B^k(r, s) G(s) dW(s, \omega).$$

Оба интеграла представляют собой случайные величины из пространства, получающегося замыканием в среднеквадратичном всевозможных линейных комбинаций:

$$\sum_k c_k \Delta_k W(s_k).$$

Таким образом, если мы покажем, что разность $W_1 - W_2$ ортогональна всем величинам вида $\Delta W(t_1)$, $\Delta = (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le b$, т. е.

$$E\left[W_1 \Delta W(t_1)\right] = E\left[W_2 \Delta W(t_1)\right],$$

то тем самым будет доказано, что $W_1 = W_2$ [12, с. 58].

В итоге имеем

$$E\left[W_1 \Delta W(t_1)\right] = \int_0^t dL^k(s) E\left[\int_0^s B^k(s, r) G(r) dW(r, \omega) \Delta W(t_1)\right] =$$

$$= \int_0^t dL^k(s) \left(\int_{t_1}^{t_2} B^k(s, r) G(r) dr\right),$$

$$E\left[W_2 \Delta W(t_1)\right] = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^t dL^k(r) B^k(r, s) G(s) ds.$$

Для интеграла Римана – Стилтьеса

$$\int_0^t dL^k(s) \left(\int_{t_1}^{t_2} B^k(s, r) G(r) dr\right) = \int_0^t dL^k(s) E\left[\int_0^s B^k(s, r) G(r) dW(r, \omega) \Delta W(t_1)\right].$$

Отсюда следует, что исходная формула представления решения справедлива.

Библиографические ссылки

1. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. М. : Наука, 1989.
2. *Гриднев Ю. В., Русецкий А. Ю., Рак С. А.* Стохастическое моделирование систем автоматического управления беспилотного летательного аппарата с применением оптимального фильтра Калмана // Докл. БГУИР. 2013. № 8 (78). С. 53–59.
3. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. М. : Фазис, 1998. Т. 1 : Факты. Модели.
4. *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. М. : Издательство геодезической литературы, 1957.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1979.
6. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М. : Наука, 2005.
7. *Медведев Г. А.* Математические модели финансовых рисков : в 2 ч. Минск : БГУ, 2001. Ч. 1.
8. *Автушко Т. С., Лазакович Н. В., Русецкий А. Ю.* Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2013. № 2. С. 74–79.
9. *Автушко Т. С.* Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений высших порядков с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций // Весці БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. 2014. № 2. С. 24–28.

10. *Автушко Т. С., Лазакович Н. В., Русецкий А. Ю.* Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2013. № 3. С. 83–92.
11. *Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. та ін.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Дрогобич : Коло, 2011.
12. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. Краткий курс. М. : Наука, 1979.

References

1. Arato M. [Linear stochastic systems with constant coefficients. Statistical approach]. Moscow : Nauka, 1989 (in Russ.).
2. Gridnev Y. V., Rusetski A. Y., Rak S. A. [Stochastic simulation of the automatic control systems of unmanned aircraft using optimal Kalman filter]. *Dokl. Beloruss. gos. univ. inform. i radioelektron.* 2013. No. 8 (78). P. 53–59 (in Russ.).
3. Shiryaev A. N. [Essentials of stochastic finance] : in 2 vol. Moscow : Fazis, 1998. Vol. 1 : Facts. Models (in Russ.).
4. Gauss C. F. Selected geodetic works. Moscow : Publishing house of geodetic literature, 1957 (in Russ.).
5. Vladimirov V. S. [Generalized equations in mathematical physics]. Moscow : Nauka, 1979 (in Russ.).
6. Miller B. M., Rubinovich E. J. [Optimization of dynamic systems with a generalized control]. Moscow : Nauka, 2005 (in Russ.).
7. Medvedev G. A. [Mathematical models of financial markets] : in 2 parts. Minsk : BSU, 2001. Part 1 (in Russ.).
8. Autushka T. S., Lazakovich N. V., Rusetski A. U. The homogeneous linear differential equation of second order in the mnemofunctions algebra. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2013. No. 2. P. 74–79 (in Russ.).
9. Autushka T. S. The Cauchy problem for non-homogeneous linear differential equations of higher order with generalized coefficients in algebra of mnemofunctions. *Vesti Belarus. dzyarz. pedagagichnaga universiteta. Ser. 3, Fiz. Mat. Inform. Biol. Geogr.* 2014. No. 2. P. 24–28 (in Russ.).
10. Autushka T. S., Lazakovich N. V., Rusetski A. U. [The Cauchy problem for non-homogeneous linear differential equations of second order with generalized coefficients in algebra of mnemofunctions]. *Vesti Nacyjanal'aj akadjemii navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* 2013. No. 3. P. 83–92 (in Russ.).
11. Tacij R. M., Stasjuk M. F., Mazurenko V. V., et al. [Generalized quasidifferential equation]. Drogobich : Kolo, 2011 (in Ukrainian).
12. Rozanov Y. A. [Random processes. Short course]. Moscow : Nauka, 1979 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 20.06.2017.
Received by editorial board 20.06.2017.