УДК 517.9

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДЕ

М. П. ДЫМКОВ[1)]

[1)]*Белорусский государственный экономический университет,*
пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь

Для линейных уравнений в частных производных, описывающих движение газа в трубопроводе, построена каноническая система из собственных и присоединенных функций прямого и сопряженного с ним оператора, порождаемых задачей. На основе этой системы введены новые многопараметрические интегральные преобразования пространственных переменных, которые в совокупности с преобразованием Лапласа по временной переменной сводят краевую задачу к системе алгебраических уравнений в частотной области. Построены также обратные многопараметрические интегральные преобразования, с помощью которых можно получить решение задачи в исходных переменных.

Ключевые слова: линейные уравнения в частных производных; многопараметрические интегральные преобразования; частотная область.

Образец цитирования:
Дымков М. П. О структуре решения в линейной задаче движения газа в трубопроводе // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 27–37.

For citation:
Dymkov M. P. Solution representation for a linear gas flow model in pipeline. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 27–37 (in Russ.).

Автор:
Михаил Пахомович Дымков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей математики учетно-экономического факультета.

Author:
Michael P. Dymkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of higher mathematics, faculty of accounting and economics.
dymkov_m@bseu.by

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 27–37
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2017. No. 3. P. 27–37

SOLUTION REPRESENTATION FOR A LINEAR GAS FLOW MODEL IN PIPELINE

M. P. DYMKOV [a]

[a]*Belarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus*

The canonical system formed the eigenfunctions and associated eigenfunctions for the underlying operator and the adjoint operator is obtained for the linear partial differential equations generating by transient gas flow in pipeline. The new multi-parametric integral transformations for the space variable based on the given canonical system are introduced which together Laplace transformation with respect to the time variable turn the initial boundary value problems into algebraic equations in the frequency domain. Also, the inverse multi-parametric integral transformations are given on the base of which the solution of the considered problem can be represented in the original variables.

Key words: linear partial differential equations; multi-parametric integral transformations; frequency domain.

В инженерной практике широко используются преобразования Лапласа для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет свести их к алгебраическим уравнениям. Для этого при решении уравнений в частных производных требуются иные интегральные преобразования, учитывающие сложный характер поведения решений на границе области пространственных переменных. В связи с этим предлагается использовать специальные интегральные преобразования для пространственных переменных [1; 2]. Применение этих преобразований совместно с преобразованием Лапласа по временной переменной сводит краевую задачу к системе алгебраических уравнений, которая после применения обратных интегральных преобразований может быть представлена в виде системы взаимосвязанных отдельных блоков, непосредственно сопряженных с начальными данными. Этот факт может быть использован для привлечения эффективных методов параллельного программирования. В частности, данный подход был успешно применен для решения некоторых актуальных задач магнитогидродинамики [3].

В настоящей работе для представления решения линейных уравнений в частных производных, описывающих движение газа в трубопроводе, используются так называемые канонические системы базисных функций. Данные системы функций состоят из совокупности собственных и присоединенных функций прямого и сопряженного с ним оператора, порождаемых рассматриваемой задачей. Построенные канонические системы функций являются ядром требуемых интегральных преобразований пространственных переменных уравнений, с помощью которых можно преобразовать дифференциальные уравнения к их алгебраическим аналогам в комплексной области.

Линейные модели потока газа в трубопроводе

Для описания основных параметров движения изотермического турбулентного газа часто используется следующая система нелинейных дифференциальных уравнений [4, с. 134–135]:

$$\frac{\partial Q(t,\, x)}{\partial t} = -h\frac{\partial p(t,\, x)}{\partial x} - \frac{\lambda c^2}{2dh}\frac{Q^2(t,\, x)}{p(x,\, t)},$$

$$\frac{\partial p(t,\, x)}{\partial t} = -\frac{c^2}{h}\frac{\partial Q(t,\, x)}{\partial x},\ \ x \in [0,\, 1],\ \ t > 0,$$

где x – пространственная переменная; t – временная переменная; h – площадь поперечного сечения; d – диаметр трубы; c – изотермическая скорость звука; λ – коэффициент трения; функции $p(t,\, x)$, $Q(t,\, x)$ описывают давление и плотность вещества в точке $(t,\, x)$. Все другие используемые здесь физические параметры трубопровода и газа считаются известными константами. Наиболее важные динамические характеристики газа, такие как отклонение давления и количества вещества в окрестности устоявшегося режима $\bar{Q}(t,\, x)$, $\bar{p}(t,\, x)$, могут быть оценены с помощью линеаризованной модели рассматриваемого процесса вида [5, с. 13–14]

$$\frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} = -h\frac{\partial p(t, x)}{\partial x} - \rho Q(t, x) - \beta p(t, x) + v_1(t, x),$$

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} + v_2(t, x),\ x \in [0, 1],\ t > 0,$$

где $\alpha = -\frac{c^2}{h}$; $\gamma = \frac{\nu c^2}{2dh}$; ρ, β – некоторые константы ($\rho = 2\beta$); $v_1(t, x)$, $v_2(t, x)$ – заданные функции. Представим данные уравнения в операторной форме как

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} = Ly(t, x) + v(t, x), \tag{1}$$

где $y(t, x) = \begin{bmatrix} y_1(t, x) \\ y_2(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q(t, x) \\ p(t, x) \end{bmatrix}$; $v(t, x) = \begin{bmatrix} v_1(t, x) \\ v_2(t, x) \end{bmatrix}$; оператор $L : C^1\left([0, 1], R^2\right) \to L_2\left([0, 1], R^2\right)$ задается формулой

$$L = A + BD_x = \begin{bmatrix} -\rho & -hD_x - \beta \\ \alpha D_x & 0 \end{bmatrix},\ \text{где}\ A = \begin{bmatrix} -\rho & -\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где D_x – оператор дифференцирования по переменной x. Начальные и граничные условия зададим следующим образом:

$$y_a(x) \triangleq y(0, x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(x) \\ p_0(x) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$U(y) \triangleq \begin{bmatrix} U_1(y) \\ U_2(y) \end{bmatrix} = 0, \tag{4}$$

где $U_1(y) \triangleq y_1(t, 1) - y_1(t, 0)$; $U_2(y) \triangleq y_2(t, 0) - y_2(t, 1)$; $\forall t \geq 0$.

Заданные начальные условия отражают факт возникновения возмущений $q_0(x)$, $p_0(x)$ в начальный момент $t = 0$ движения газа в трубопроводе, а граничные условия обеспечивают сохранение начального и конечного значений давления и значения количества газа в трубопроводе.

Применив к задаче (1)–(4) одностороннее преобразование Лапласа по переменной t, получим уравнение в частотной области комплексной переменной s:

$$sY(s, x) = LY(s, x) + V(s, x) + y_a(x),\ x \in [0, 1],\ s \in C, \tag{5}$$

с граничными условиями

$$Y(s, 1) - Y(s, 0) = 0. \tag{6}$$

Здесь использовано свойство коммутируемости преобразования Лапласа и дифференциального оператора L, задаваемого формулой (2).

Для дальнейшей трансформации граничной задачи (5), (6) к алгебраическим уравнениям относительно функций в комплексной плоскости требуется построить соответствующие преобразования. С этой целью будем использовать многопараметрические интегральные преобразования (прямые и обратные) [1, с. 193–194] по пространственной переменной x, ядром которых являются канонические системы, построенные из собственных и присоединенных функций $\left\{ e_m^{(p)}(x, \lambda_i),\ p = 1, \ldots, P(\lambda_i),\ m = 0, 1, \ldots, M_p \right\}$ оператора L и собственных и присоединенных функций $\left\{ \varepsilon_m^{(p)}(x, \lambda_i^*),\ p = 1, \ldots, P(\lambda_i),\ m = 0, 1, \ldots, M_p \right\}$

сопряженного с ним оператора L^*, где M_p и $P(\lambda_i)$ – кратность и порядок рассматриваемых собственных значений и собственных функций соответственно. Предполагается, что линейный оператор L является секториальным [6, с. 26] с компактной резольвентой и непустым спектром $\sigma(L)$.

Напомним, что для заданного собственного значения $\lambda \in \sigma(L)$ оператора L и заданного его собственного вектора $e_0^{(p)}$, $1 \le p \le P_\lambda$, ненулевой вектор $e_m^{(p)} \ne 0$ называется присоединенным собственным вектором порядка m, если он удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(\lambda E - L)e_0^{(p)} = 0,\ (\lambda E - L)e_1^{(p)} = e_0^{(p)},\ \ldots,\ (\lambda E - L)e_m^{(p)} = e_{m-1}^{(p)}.$$

Максимально возможный порядок M_p присоединенного вектора называется кратностью собственного вектора $e_0^{(p)}$. Отметим, что число P_λ означает размерность пространства собственных векторов $B = B(\lambda) = \left\{e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \ldots, e_0^{(P_\lambda)}\right\}$, отвечающих собственному значению λ. Аналогичные понятия вводятся для сопряженного оператора L^* и его собственных значений λ^* и векторов.

Многопараметрические интегральные преобразования $T = \left\{T_m^p(\lambda_i),\ \lambda_i \in \sigma(L)\right\}$ по пространственной переменной x определяются с помощью канонической системы $\Big\{\varepsilon_m^{(p)}(x, \lambda_i^*),\ p = 1, \ldots, P(\lambda_i),$ $m = 0, 1, \ldots, M_p\Big\}$ собственных и присоединенных векторов сопряженного оператора L^* и задаются следующим образом [1, с. 193]:

$$T_m^p(\lambda_i)Y(s, x) \triangleq \tilde{Y}_m^p(s, \lambda_i) = \left(Y(s, x),\ \varepsilon_m^p(x, \lambda_i^*)\right)_{L_2} = \int_0^1 Y(s, x)\varepsilon_m^p(x, \lambda_i^*)dx,$$

где $p = 1, \ldots, P_{\lambda_i}$; $m = 0, 1, \ldots, M_p$. Здесь $(\cdot, \cdot)_{L_2}$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2\left([0, 1],\ R^2\right)$ (см. ниже), а кратность $P(\lambda_i)$ определяется для каждого $\lambda_i \in \sigma(L)$.

Из приведенного определения интегральных преобразований и свойств сопряженного оператора можно получить следующий аналог теоремы дифференцирования, известной из операционного исчисления, построенного с помощью преобразований Лапласа – Фурье. Действительно,

$$T_m^p(\lambda_i)\{LY(s, x)\} = \left(L\{Y(s, x)\},\ \varepsilon_m^p(x, \lambda_i^*)\right)_{L_2} = \left(Y(s, x),\ L^*\left\{\varepsilon_m^p(x, \lambda_i^*)\right\}\right)_{L_2}.$$

Тогда при $m = 0$ имеем

$$T_0^p(\lambda_i)\{LY(s, x)\} = \left(Y(s, x),\ L^*\left\{\varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*)\right\}\right)_{L_2} = \lambda_i\left(Y(s, x),\ \varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*)\right)_{L_2} = \lambda_i \tilde{Y}_0^p(s, \lambda_i).$$

При $m = 1$ с учетом определения присоединенных векторов имеем

$$T_1^p(\lambda_i)\{LY(s, x)\} = \left(Y(s, x),\ L^*\left\{\varepsilon_1^p(x, \lambda_i^*)\right\}\right)_{L_2} = \lambda_i\left(Y(s, x),\ \varepsilon_1^p(x, \lambda_i^*)\right)_{L_2} -$$
$$-\left(Y(s, x),\ \varepsilon_0^p(x, \lambda_i^*)\right)_{L_2} = \lambda_i \tilde{Y}_1^p(s, \lambda_i) - \tilde{Y}_0^p(s, \lambda_i).$$

Далее, для любого $m = 1, \ldots, M_p$ по аналогии с предыдущим получим

$$T_m^p(\lambda_i)\{LY(s, x)\} = \lambda_i \tilde{Y}_m^p(s, \lambda_i) - \tilde{Y}_{m-1}^p(s, \lambda_i),$$

где для удобства считаем, что $\tilde{Y}_k^p \equiv 0$ для $k < 0$.

Обратное преобразование T^{-1} к многопараметрическому преобразованию $T = \left\{T_m^p(\lambda_i),\ \lambda_i \in \sigma(L)\right\}$ определяется с помощью канонической системы $\left\{e_m^{(p)}(x, \lambda_i),\ p = 1, \ldots, P(\lambda_i),\ m = 0, 1, \ldots, M_p\right\}$ оператора L и задается [1, с. 194] следующим образом:

$$T^{-1}\left\{\tilde{Y}_m^p(s, \lambda_i)\right\} = Y_m^p(s, x) = \sum_{\lambda_i \in \sigma(L)} \sum_{p=1}^{P(\lambda_i)} \sum_{m=0}^{M_p} \tilde{Y}_m^p(s, \lambda_i)e_{M_p - m}^{(p)}(x, \lambda_i).$$

Теорема. *Решение задачи (5), (6) в частотной области имеет вид*

$$Y(s, x) = Y_{\text{нач}}(s, x) + Y_{\text{внеш}}(s, x),$$

где

$$Y_{\text{нач}}(s, x) = \sum_{\lambda_i \in \sigma(L)} \sum_{p=1}^{P(\lambda_i)} \sum_{m=0}^{M_p} \left(\sum_{q=0}^{m} \frac{\tilde{y}_{a,\,p,\,m-q}}{(s-\lambda_i)^{q+1}} \right) e^{(p)}_{M_p - m}(x, \lambda_i);$$

$$Y_{\text{внеш}}(s, x) = \sum_{\lambda_i \in \sigma(L)} \sum_{p=1}^{P(\lambda_i)} \sum_{m=0}^{M_p} \left(\sum_{q=0}^{m} \frac{\tilde{V}^{p}_{m-q}}{(s-\lambda_i)^{q+1}} \right) e^{(p)}_{M_p - m}(x, \lambda_i).$$

Доказательство. Опишем детально поэтапное применение введенных выше преобразований. Применим к (5) преобразование по пространственной переменной $T^p_m(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \sigma(L)$, сначала при $m = 0$:

$$s\tilde{Y}^p_0(\lambda_i, s) = \lambda_i \tilde{Y}^p_0(\lambda_i, s) + \tilde{V}^p_0(\lambda_i, s) + \tilde{y}_{a,\,p,\,0}(\lambda_i),$$

где

$$\tilde{V}^p_0(\lambda_i, s) = \left(V(s, x),\ \varepsilon^p_0(x, \lambda^*_i)\right)_{L_2} = \int_0^1 V(s, x)\varepsilon^p_0(x, \lambda^*_i)\,dx;$$

$$y_{a,\,p,\,0}(\lambda_i) = \left(y_a(s, x),\ \varepsilon^p_0(x, \lambda^*_i)\right)_{L_2} = \int_0^1 y_a(s, x)\varepsilon^p_0(x, \lambda^*_i)\,dx.$$

Отсюда следует

$$\tilde{Y}^p_0(\lambda_i, s) = \frac{1}{s-\lambda_i}\tilde{V}^p_0(\lambda_i, s) + \frac{1}{s-\lambda_i}\, y_{a,\,p,\,0}(\lambda_i).$$

Теперь применим к (5) преобразование по пространственной переменной при $m = 1$, учитывая свойство дифференцирования:

$$s\tilde{Y}^p_1(\lambda_i, s) = \lambda_i \tilde{Y}^p_1(\lambda_i, s) - \tilde{Y}^p_1(\lambda_i, s) + \tilde{V}^p_1(\lambda_i, s) + \tilde{y}_{a,\,p,\,1}(\lambda_i),$$

где

$$\tilde{V}^p_1(\lambda_i, s) = \left(V(s, x),\ \varepsilon^p_1(x, \lambda^*_i)\right)_{L_2} = \int_0^1 V(s, x)\varepsilon^p_1(x, \lambda^*_i)\,dx;$$

$$y_{a,\,p,\,1}(\lambda_i) = \left(y_a(s, x),\ \varepsilon^p_1(x, \lambda^*_i)\right)_{L_2} = \int_0^1 y_a(s, x)\varepsilon^p_1(x, \lambda^*_i)\,dx.$$

Отсюда имеем

$$\tilde{Y}^p_1(\lambda_i, s) = \frac{1}{s-\lambda_i}\tilde{V}^p_1(\lambda_i, s) + \frac{1}{s-\lambda_i}\, y_{a,\,p,\,1}(\lambda_i) + \frac{1}{s-\lambda_i}\tilde{Y}^p_0(\lambda_i, s) =$$

$$= \frac{1}{s-\lambda_i}\tilde{V}^p_1(\lambda_i, s) + \frac{1}{s-\lambda_i}\, y_{a,\,p,\,1}(\lambda_i) + \frac{1}{(s-\lambda_i)^2}\tilde{V}^p_0(\lambda_i, s) + \frac{1}{(s-\lambda_i)^2}\, y_{a,\,p,\,0}(\lambda_i).$$

Продолжая описанную выше процедуру для любого m, получим

$$s\tilde{Y}^p_m(\lambda_i, s) = \lambda_i \tilde{Y}^p_m(\lambda_i, s) - \tilde{Y}^p_m(\lambda_i, s) + \tilde{V}^p_m(\lambda_i, s) + \tilde{y}_{a,\,p,\,m}(\lambda_i)$$

и

$$\tilde{Y}^p_m(\lambda_i, s) = \frac{1}{s-\lambda_i}\tilde{V}^p_m(\lambda_i, s) + \frac{1}{s-\lambda_i}\, y_{a,\,p,\,m}(\lambda_i) + \frac{1}{s-\lambda_i}\tilde{Y}^p_{m-1}(\lambda_i, s) =$$

$$= \sum_{q=0}^{m} \left(\frac{1}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\tilde{V}^p_{m-q}(\lambda_i, s) + \frac{1}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\, y_{a,\,p,\,m-q}(\lambda_i) \right).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь лишь воспользоваться обратным преобразованием T^{-1} и выделить слагаемые, связанные с начальными данными $y_a(x)$ и функциями $v(t, x)$, оказывающими воздействие на динамику процесса.

Каноническая система собственных векторов

Как уже отмечалось, для построения интегральных преобразований по пространственной переменной и, как следует из теоремы, для представления решения задачи в частотной области комплексной переменной s требуется построить канонические системы функций для прямого оператора L и сопряженного с ним оператора L^*. Эти системы формируются из цепочек собственных и присоединенных (если таковы имеются) функций прямого и сопряженного операторов соответственно. Ниже дано описание процедуры построения канонических систем для операторов, порождаемых рассматриваемой задачей.

Сопряженный оператор

Введенный выше оператор L определен в пространстве $C^1([0, 1], R^2)$ непрерывных дифференцируемых функций, которое является плотным в гильбертовом пространстве $L_2([0, 1], R^2)$ суммируемых с квадратом функций на $[0, 1]$. Скалярное произведение в $L_2([0, 1], R^2)$ зададим стандартным образом формулой $(f, g) = \int_0^1 f^T(x) g(x) dx,\ \forall f, g \in L_2([0, 1], R^2)$ (здесь f^T означает транспонирование).

Для нахождения сопряженного оператора воспользуемся формулой Грина

$$(Ly, z)_{L_2} = \int_0^1 z^T Ly dx = \int_0^1 z^T (A + BD_x) y dx = \left(y, \left(A^T - B^T D_x\right) z\right) + z^T By\Big|_{x=0}^{x=1},$$

где $z(t, x) = \begin{bmatrix} z_1(t, x) \\ z_2(t, x) \end{bmatrix}$. Оператор $L^* = A^T - B^T D_x$ будет сопряженным, если выполняются следующие соотношения:

$$z^T(t, x) By(t, x)\Big|_{x=0}^{x=1} = z^T(t, 1) By(t, 1) - z^T(t, 0) By(t, 0) =$$

$$= \alpha\left[z_2(t, 1) y_1(t, 1) - z_2(t, 0) y_1(t, 0)\right] + h\left[z_1(t, 0) y_2(t, 0) - z_1(t, 1) y_1(t, 1)\right] = 0.$$

С учетом граничных условий последние соотношения принимают вид

$$\alpha\left(z_2(t, 1) - z_2(t, 0)\right) y_1(t, 0) = h\left(z_1(t, 1) - z_1(t, 0)\right) y_2(t, 0).$$

Следовательно, значения функций $z_1(t, x)$ и $z_2(t, x)$ в граничных точках $x = 1$ и $x = 0$ должны удовлетворять условиям $z_2(t, 0) - z_2(t, 1) = 0$ и $z_1(t, 1) - z_1(t, 0) = 0$.

Таким образом, сопряженный оператор L^* определяется формулой

$$L^* = A^T - B^T D_x = \begin{bmatrix} -\rho & -\alpha D_x \\ -\beta + hD_x & 0 \end{bmatrix}$$

и граничными условиями вида

$$z_1(t, 1) - z_1(t, 0) = 0,\ z_2(t, 1) - z_2(t, 0) = 0.$$

Собственные функции прямого оператора

Собственные функции оператора L удовлетворяют уравнению

$$[\lambda I - L] e_{p,0}(x, \lambda) = 0,\ p = 1, \ldots, P(\lambda),$$

где $e_{p,0}(x,\lambda)=\left[f_{p,0}^{1}(x,\lambda),\ f_{p,0}^{2}(x,\lambda)\right]^{T}$; $P(\lambda)$ обозначает количество всех линейно независимых собственных функций, соответствующих собственному значению λ. Перепишем последнее уравнение в координатной форме

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{p,0}^{1}\\ f_{p,0}^{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\rho & hD_x+\beta\\ -\alpha D_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{p,0}^{1}\\ f_{p,0}^{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

относительно искомых функций $f_{p,0}^{1}$ и $f_{p,0}^{2}$:

$$\begin{cases}\lambda f_{p,0}^{1}+\rho f_{p,0}^{1}+hf_{p,0}^{2'}+\beta f_{p,0}^{2}=0,\\ \lambda f_{p,0}^{2}-\alpha f_{p,0}^{1'}=0\end{cases}\ \xrightarrow[\lambda\neq 0]{}\ \begin{cases}h\alpha f_{p,0}^{1''}+\alpha\beta f_{p,0}^{1'}+\lambda(\lambda+\rho)f_{p,0}^{1}=0,\\ f_{p,0}^{2}=\dfrac{\alpha}{\lambda}f_{p,0}^{1'},\end{cases}\tag{7}$$

где верхние индексы $'$ и $''$ – первая и вторая производные функции по пространственной переменной x соответственно. Отметим, что для случая $\lambda_0=0$ приведенные выше соотношения имеют вид

$$\begin{cases}\rho f_{p,0}^{1}+hf_{p,0}^{2'}+\beta f_{p,0}^{2}=0,\\ \alpha f_{p,0}^{1'}=0\end{cases}$$

и, соответственно, в этом случае общим решением этих уравнений является

$$f_{p,0}^{1}(x,\lambda_0)=c_0,\ f_{p,0}^{2}(x,\lambda_0)=c_1e^{-\frac{\beta}{h}x}-2c_0.$$

Граничные условия (4) для найденных функций будут удовлетворены, если $c_1=0$. Следовательно, функции

$$e_{1,0}(x,\lambda_0)=\begin{bmatrix}f_{p,0}^{1}(x,\lambda_0)\\ f_{p,0}^{2}(x,\lambda_0)\end{bmatrix}=c_0\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

являются собственными функциями оператора L, соответствующими значению $\lambda_0=0$.

Далее, для $\lambda\neq 0$ характеристический полином для первого дифференциального уравнения из (7) имеет вид

$$h\alpha K^2+\alpha\beta K+\lambda(\lambda+\rho)=0,$$

где $\alpha<0$; $h>0$; $\beta>0$; $\rho>0$. Его корни задаются формулой

$$K_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-4h\alpha\lambda(\lambda+\rho)}}{2h\alpha}=\frac{-\beta}{2h}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4h^2}-\frac{\lambda(\lambda+\rho)}{h\alpha}}=a\pm jb,\tag{8}$$

если величина $R\triangleq\dfrac{\beta^2}{4h^2}-\dfrac{\lambda(\lambda+\rho)}{h\alpha}<0$, где через j обозначена мнимая единица ($j^2=-1$); $a=\dfrac{-\beta}{2h}$; $b=\sqrt{\left|\dfrac{\beta^2}{4h^2}-\dfrac{\lambda(\lambda+\rho)}{h\alpha}\right|}$.

Если $R\triangleq\dfrac{\beta^2}{4h^2}-\dfrac{\lambda(\lambda+\rho)}{h\alpha}\geq 0$, то корни характеристического уравнения (8) есть $K_{1,2}=a\pm b$.

Рассмотрим случай $R<0$. Тогда корням $K_{1,2}$ соответствуют следующие решения $f_{p,0}^{1}(x,\lambda)$ и $f_{p,0}^{2}(x,\lambda)$ дифференциальных уравнений (7):

$$\begin{cases} f_{p,0}^{1}(x, \lambda) = c_1 e^{(a+jb)x} + c_2 e^{(a-jb)x}, \\ f_{p,0}^{2}(x, \lambda) = \dfrac{\alpha}{\lambda}\left[c_1(a+jb)e^{(a+jb)x} + c_2(a-jb)e^{(a-jb)x}\right]. \end{cases}$$

Учитывая граничные условия (4), получим, что искомые функции должны удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$c_1 + c_2 = c_1 e^{a+jb} + c_2 e^{a-jb}, \;\; c_1(a+jb) + c_2(a-jb) = c_1(a+jb)e^{a+jb} + c_2(a-jb)e^{a-jb}.$$

Эта система имеет нетривиальное решение $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, если

$$\det\begin{vmatrix} 1 - e^{a+jb} & 1 - e^{a-jb} \\ (a+jb)\left(1 - e^{a+jb}\right) & (a-jb)\left(1 - e^{a-jb}\right) \end{vmatrix} = 0$$

или $2\left(1 - e^{a+jb}\right)\left(1 - e^{a-jb}\right)jb = 0,$ что эквивалентно условиям

$$1 - e^{a+jb} = 0, \; 1 - e^{a-jb} = 0, \; b = 0. \tag{9}$$

Условие $b = 0$ дает равенство $\dfrac{\beta^2}{4h^2} - \dfrac{\lambda(\lambda+\rho)}{h\alpha} = 0.$ В этом случае собственные значения определяются формулой

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \beta\sqrt{1 + \frac{\alpha}{4h}}. \tag{10}$$

Отметим, что в (10) возможны и комплексные собственные значения.

Далее, из (9) имеем равенства $e^{a+jb} = e^0$ и $e^{a-jb} = e^0$. Поскольку комплекснозначная функция $e^z, z \in C$, имеет мнимый период, то из последних равенств получаем $a + jb = 2\pi nj$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ и $a - jb = 2\pi kj$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда из (8) следует, что собственные значения $\lambda^{(n)}$ удовлетворяют уравнению

$$\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\lambda(\lambda+\rho)}{h\alpha}} = 2\pi nj + \frac{\beta}{2h}, \; n = 0, \pm 1, \ldots.$$

Отсюда для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеем

$$\lambda_{1,2}^{(n)} = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\beta\pi nj + 4h\alpha\pi^2 n^2}. \tag{11}$$

Кроме того, кратность найденных собственных значений равна единице: $P(\lambda_i) = 1.$ Теперь можно проверить, что собственные функции прямого оператора задаются следующими формулами:

а) для случая $K_{1,2} = a \pm jb$, где $b = 0$ и соответствующие собственные значения λ_1, λ_2 задаются формулой (10), собственными функциями являются

$$e_{1,0}(x, \lambda_1) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^{1}(x, \lambda_1) \\ f_{p,0}^{2}(x, \lambda_1) \end{bmatrix} = c_1 e^{ax}\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{a\alpha}{\lambda_1} \end{bmatrix}, \;\; e_{1,0}(x, \lambda_2) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^{1}(x, \lambda_2) \\ f_{p,0}^{2}(x, \lambda_2) \end{bmatrix} = c_2 e^{ax}\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{a\alpha}{\lambda_2} \end{bmatrix};$$

б) для случая $K_{1,2} = a \pm jb$, $b \neq 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где соответствующие собственные значения $\lambda_{1,2}^{(n)}$ выражаются формулой (11), собственные функции имеют вид

$$e_{1,0}\left(x, \lambda_i^{(n)}\right) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^{1}\left(x, \lambda_i^{(n)}\right) \\ f_{p,0}^{2}\left(x, \lambda_i^{(n)}\right) \end{bmatrix} = c_i^{(n)} e^{2\pi njx}\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{2a\alpha\pi nj}{\lambda_i^{(n)}} \end{bmatrix}, \;\; i = 1, 2, \; n = 0, \pm 1, \ldots.$$

Рассмотрим теперь случай $R > 0$. Тогда корням $K_{1,2} = a \pm b$ соответствуют следующие решения $f_{p,0}^{1}(x, \lambda)$ и $f_{p,0}^{2}(x, \lambda)$ дифференциальных уравнений (7):

$$\begin{cases} f_{p,0}^{1}(x, \lambda) = c_1 e^{(a+b)x} + c_2 e^{(a-b)x}, \\ f_{p,0}^{2}(x, \lambda) = \dfrac{\alpha}{\lambda}\left[c_1(a+b)e^{(a+b)x} + c_2(a-b)e^{(a-b)x}\right]. \end{cases}$$

Учитывая граничные условия (4), получим, что искомые функции должны удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$c_1 + c_2 = c_1 e^{a+b} + c_2 e^{a+b}, \;\; c_1(a+b) + c_2(a-b) = c_1(a+b)e^{a+b} + c_2(a-b)e^{a-b}.$$

Эта система имеет нетривиальное решение $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, если

$$\det\begin{vmatrix} 1 - e^{a+b} & 1 - e^{a-b} \\ (a+b)\left(1 - e^{a+b}\right) & (a-b)\left(1 - e^{a-b}\right) \end{vmatrix} = 0$$

или $2\left(1 - e^{a+b}\right)\left(1 - e^{a-b}\right)b = 0,$ что эквивалентно условиям

$$1 - e^{a+b} = 0, \; 1 - e^{a-b} = 0, \; b = 0.$$

Можно проверить, что в этом случае соответствующие собственные значения содержатся среди уже ранее найденных значений, представленных формулами (10) и (11). Следовательно, рассмотренный случай $R > 0$ не порождает новых собственных функций.

Собственные функции сопряженного оператора

Спектральная задача для сопряженного оператора L^* определяется уравнением

$$\left[\hat{\lambda} I - L^*\right]\varepsilon_{p,0}\left(x, \hat{\lambda}\right) = 0, = 1, \ldots, P\left(\hat{\lambda}\right),$$

где $\varepsilon_{p,0}\left(x, \hat{\lambda}\right) = \left[z_{p,0}^{1}\left(x, \hat{\lambda}\right), \; z_{p,0}^{2}\left(x, \hat{\lambda}\right)\right]^T;$ $P\left(\hat{\lambda}\right)$ – количество линейно независимых собственных функций, соответствующих собственному значению $\hat{\lambda}$. Последнее уравнение перепишем в виде

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{p,0}^{1} \\ z_{p,0}^{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho & \alpha D_x \\ \beta - h D_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{p,0}^{1} \\ z_{p,0}^{2} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем следующую систему линейных уравнений относительно $z_{p,0}^{1}$ и $z_{p,0}^{2}$:

$$\begin{cases} \hat{\lambda} z_{p,0}^{1} + \rho z_{p,0}^{1} + \alpha z_{p,0}^{2'} = 0, \\ \hat{\lambda} z_{p,0}^{2} + \beta z_{p,0}^{1} - h z_{p,0}^{1'} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\hat{\lambda} \neq 0} \begin{cases} h\alpha z_{p,0}^{1''} - \alpha\beta z_{p,0}^{1'} + \hat{\lambda}\left(\hat{\lambda} + \rho\right) z_{p,0}^{1} = 0, \\ z_{p,0}^{2} = -\dfrac{\beta}{\hat{\lambda}} z_{p,0}^{1} + \dfrac{h}{\hat{\lambda}} z_{p,0}^{1'}, \end{cases} \tag{12}$$

где верхний индекс $'$ – производная функция по пространственной переменной x.

Для случая $\hat{\lambda}_0 = 0$ соответствующие собственные функции имеют вид

$$\varepsilon_{1,0}\left(x, \hat{\lambda}_0\right) = \begin{bmatrix} f_{p,0}^{1}\left(x, \hat{\lambda}_0\right) \\ f_{p,0}^{2}\left(x, \hat{\lambda}_0\right) \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином для первого дифференциального уравнения из (12) имеет вид

$$h\alpha K^2 - \alpha\beta K + \hat{\lambda}\left(\hat{\lambda} + \rho\right) = 0,$$

корни которого даются формулой

$$K_{1,2} = \frac{\alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 4h\alpha\hat{\lambda}\left(\hat{\lambda}+\rho\right)}}{2h\alpha} = \frac{\beta}{2h} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4h^2} - \frac{\hat{\lambda}\left(\hat{\lambda}+\rho\right)}{h\alpha}} = -a \pm jb,$$

где $a = \dfrac{-\beta}{2h}$; $b = \sqrt{-\left(\dfrac{\beta^2}{4h^2} - \dfrac{\hat{\lambda}\left(\hat{\lambda}+\rho\right)}{h\alpha}\right)}$.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были приведены выше при решении спектральной задачи для прямого оператора, получим, что собственные значения и собственные функции сопряженного оператора имеют следующий вид:

а) для случая $K_{1,2} = -a$, $b = 0$ задаются формулами

$$\hat{\lambda}_{1,2} = -\beta \pm \beta\sqrt{1+\frac{4\alpha}{h}},\ \ \hat{\varepsilon}_{1,0}\left(x, \hat{\lambda}_i\right) = \begin{bmatrix} z^1_{p,0}\left(x, \hat{\lambda}_i\right) \\ z^2_{p,0}\left(x, \hat{\lambda}_i\right) \end{bmatrix} = c_i e^{-ax}\begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{2(ah+\beta)\alpha}{\hat{\lambda}_i} \end{bmatrix};$$

б) для случая $K_{1,2} = -a \pm jb = 2\pi nj$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, задаются как

$$\hat{\lambda}^{(n)}_{1,2} = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\beta\pi nj + 4h\alpha\pi^2 n^2},\quad \hat{\varepsilon}_{1,0}\left(x,\ \hat{\lambda}^{(n)}_i\right) = c^{(n)}_i e^{2\pi njx}\begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{2(ah+\beta)\alpha\pi nj}{\hat{\lambda}^{(n)}_i} \end{bmatrix}.$$

В целях завершения решения задачи остается осуществить построение присоединенных функций для найденных собственных функций. Для этого можно воспользоваться ортогональностью [1] канонических систем: $\left(e^p_m\left(x, \lambda_i\right), \varepsilon^l_n\left(x, \lambda^*_w\right)\right)_{L_2} = \delta_{i,w}\delta_{p,l}\,\delta_{m, M_p - n}$, где $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера. Другими словами, это означает, что для построения присоединенных вектор-функций можно воспользоваться следующей процедурой. Если для одного и того же собственного значения λ_i и сопряженного с ним λ^*_i собственные векторы прямого и сопряженного операторов не ортогональны, то присоединенных векторов, соответствующих данному собственному значению, не существует. В противном случае находится первый присоединенный вектор прямого оператора L. Если он окажется ортогонален рассматриваемому собственному вектору сопряженного оператора L^*, то других присоединенных векторов не существует. В противном случае процедура продолжается до получения ортогональных векторов. Эта процедура повторяется для каждого собственного значения. Аналогичным образом находят присоединенные векторы для сопряженного оператора.

Таким образом, в соответствии с приведенной теоремой решение $Y(s, x)$ рассматриваемой задачи в частотной области можно представить через найденные выше канонические системы функций. Для нахождения решения задачи $y(t, x)$ в исходных переменных нужно к найденной функции $Y(s, x)$ применить обратное преобразование Лапласа.

Библиографические ссылки

1. *Dymkou V., Rabenstein R., Stefen P.* Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods // Multidimens. Syst. Signal Process. 2006. Vol. 17. P. 177–209.

2. *Dymkov M., Dymkou V.* Multifunctional transformation method in gas pipelines modeling // Еругинские чтения – 2013 : XV Междунар. науч. конф. по дифф. уравнениям (Гродно, 13–16 мая 2013 г.) : в 2 т. Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2013. Т. 2. С. 83.

3. *Dymkou V., Poherat A.* Spectral methods for wall bounded MHD // J. Theor. Comput. Fluid Dyn. 2009. Vol. 23, № 6. P. 535–555.

4. *Osiadacz A.* Simulation and analysis of gas network. London : Gulf Publishing Company, 1987.

5. *Aalto H.* Real-time receding horizont optimization of gas pipeline networks [Electronic resource]. 2005. URL: http://lib.hut.fi/Diss/2005/isbn9512276593 (date of access: 23.05.2017).

6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений : пер. с англ. М. : Мир, 1985.

References

1. Dymkou V., Rabenstein R., Stefen P. Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods. *Multidimens. Syst. Signal Process.* 2006. Vol. 17. P. 177–209.

2. Dymkov M., Dymkou V. Multifunctional transformation method in gas pipelines modeling. *Eruginskie chteniya – 2013* : XV Int. sci. conf. differ. equ. (Grodno, 13–16 May, 2013) : in 2 vol. Minsk : Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, 2013. Vol. 2. P. 83 (in Russ.).

3. Dymkou V., Poherat A. Spectral methods for wall bounded MHD. *J. Theor. Comput. Fluid Dyn.* 2009. Vol. 23, No. 6. P. 535–555.

4. Osiadacz A. Simulation and analysis of gas network. London : Gulf Publishing Company, 1987.

5. Aalto H. Real-time receding horizont optimization of gas pipeline networks. 2005. URL: http://lib.hut.fi/Diss/2005/isbn9512276593 (date of access: 23.05.2017).

6. Henry D. [Geometric theory of semilinear parabolic equations]. Moscow : Mir, 1985 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 06.06.2017.
Received by editorial board 06.06.2017.