*УДК 517.983.34*

## АНАЛОГИ ФОРМУЛ СОХОЦКОГО ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

***В. В. КАШЕВСКИЙ*** [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Доказаны предельные формулы для сингулярных интегралов вида

$$\Phi_n(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n(\tau - z)}{\tau - z} d\tau, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Предельные значения таких интегралов выражаются через сингулярные интегральные операторы

$$\Psi_n(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t} d\tau, \ \ n = 1, 2, \ldots, \ t \in (0, 1),$$

а также интегральные операторы

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \ln^k|t - \tau| d\tau.$$

Из указанных формул получено аддитивное представление для сингулярных интегралов

**Образец цитирования:**
Кашевский В. В. Аналоги формул Сохоцкого для интегральных операторов с дополнительной логарифмической особенностью // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 4–10.

**For citation:**
Kashevski V. V. Analogue Sochocky formulae for integral operators with additional logarithmic singularity. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 3. P. 4–10 (in Russ.).

**Автор:**
***Витольд Васильевич Кашевский*** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

**Author:**
***Vitold V. Kashevski***, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics and mathematical physics, faculty of physics.
*kshvskii@mail.ru*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln|\tau - t|}{\tau - t} d\tau.$$

Формулы, которые доказаны в статье, могут быть использованы для исследования сингулярных операторов и решения интегральных уравнений.

***Ключевые слова:*** интегральные операторы; сингулярные интегралы.

# ANALOGUE SOCHOCKY FORMULAE FOR INTEGRAL OPERATORS WITH ADDITIONAL LOGARITHMIC SINGULARITY

***V. V. KASHEVSKI*** [a]

[a] *Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

In this paper we prove the limit formulas for singular integrals of the form

$$\Phi_n(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n(\tau - z)}{\tau - z} d\tau, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Limit values of such integrals are expressed in terms of singular integral operators

$$\Psi_n(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t} d\tau, \ n = 1, 2, \ldots, \ t \in (0, 1),$$

and also integral operators

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \ln^k|t - \tau| d\tau.$$

As an application of these formulas derived additive representation for singular integrals

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln|\tau - t|}{\tau - t} d\tau.$$

The formulas are derived in the article can be used for research and operators singular integral equations solutions.

***Key words:*** integral operators; singular integrals.

В теории сингулярных интегральных уравнений и краевых задач для аналитических функций важную роль играют формулы Сохоцкого. Если $L$ – гладкая линия на комплексной плоскости и функция $\varphi : L \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\left|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\right| \le c|t_1 - t_2|^{\mu}, \ 0 < \mu \le 1,$$

то для интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

справедливы следующие предельные формулы Сохоцкого [1; 2]:

$$\Phi^+(z) = +\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ t \in L,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ t \in L.$$

В настоящей работе получены аналогичные формулы для интегралов

$$\Phi_n(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n(\tau - z)}{\tau - z}d\tau,\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (1)$$

В формуле (1) непрерывная ветвь логарифма $\ln(\tau - z)$ выбрана с разрезом вдоль части действительной оси от $\tau$ до $+\infty$ так, что

$$-\frac{\pi}{2} \le \arg(\tau - i) < 0.$$

Нам понадобятся сингулярные интегралы вида

$$\Psi_n(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t}d\tau,\ \ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (2)$$

с дополнительной логарифмической особенностью.

**Лемма 1.** *Интеграл (2), где функция* $\varphi$ *удовлетворяет условию Гёльдера, существует в смысле главного значения и равен*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t}d\tau = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\ln^n|\tau - t|d\tau + \frac{1}{n+1}\left(\ln^{n+1}(1-t) - \ln^{n+1}t\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению главного значения интеграла

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t}d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_0^{t-\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t}d\tau + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(\tau)\ln^n|\tau - t|}{\tau - t}d\tau\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_0^{t-\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\ln^n|\tau - t|d\tau + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\ln^n|\tau - t|d\tau\right) + \varphi(t)\int_0^1 \frac{\ln^n|\tau - t|}{\tau - t}d\tau =$$

$$= \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\ln^n|\tau - t|d\tau + \frac{1}{n+1}\left(\ln^{n+1}(1-t) - \ln^{n+1}t\right).$$

Здесь последний интеграл сходится как несобственный. Лемма доказана.

Далее, будем использовать следующие обозначения:

$$\ln^{\pm}(\tau - t) = \begin{cases} \ln|\tau - t|,\ \ \tau > t, \\ \ln|\tau - t| \mp \pi i,\ \ \tau < t. \end{cases}$$

Кроме того, пусть

$$\Psi_t(z) = \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))\ln^n(\tau - z)}{\tau - z}d\tau,$$

$$\Psi_t^{\pm}(t) = \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))\left(\ln^{\pm}(\tau - t)\right)^n}{\tau - t}d\tau,\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

**Лемма 2.** *Предположим, что функция* $\varphi$ *удовлетворяет условию Гёльдера и* $t \in (0;1)$. *Тогда*

$$\lim_{y \to 0+}\Psi_t(t + iy) = \Psi_t^+(t),\ \ \lim_{y \to 0-}\Psi_t(t + iy) = \Psi_t^-(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = 1$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $z = t + iy$. Достаточно оценить разность

$$\left|\int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))\ln^n(\tau - z)}{\tau - z}d\tau - \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))\ln^+(\tau - t)}{\tau - t}d\tau\right| \le I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \left| \int_{t-\delta}^{t} \left( \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right) (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \right|,$$

$$I_2 = \left| \int_{0}^{t-\delta} \left( \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right) (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \right|,$$

$$I_3 = \left| \int_{0}^{t+\delta} \left( \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right) (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \right|,$$

$$I_4 = \left| \int_{t+\delta}^{1} \left( \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right) (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau \right|.$$

Нам нужна оценка следующей величины:

$$\left| \left( \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right) \right| \le \left| \left( \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - t} \right) \right| + \left| \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - t} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right| = I_{11} + I_{12}. \tag{3}$$

Пусть $t - \delta < \tau < t$. Можно далее считать, что $\delta < \frac{1}{4}$ и $|z - t| < \frac{1}{4}$. Тогда $|z - \tau| < \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$\left| \ln|z - \tau| \right| > \ln 2. \tag{4}$$

Поскольку $\frac{1}{|z - \tau|} < \frac{1}{|t - \tau|}$, то

$$\left| \ln|z - \tau| \right| \le \left| \ln|t - \tau| \right|. \tag{5}$$

Далее, с учетом (4) и (5) получим оценку

$$\left| \arg(\tau - z) \right| \le \pi < c_1 \left| \ln|\tau - t| \right|. \tag{6}$$

Тогда из оценок (5) и (6) вытекает неравенство

$$\left| \ln(\tau - z) \right| < c_2 \left| \ln|\tau - t| \right|. \tag{7}$$

Поэтому

$$I_{11} \le \left| \ln(\tau - z) \right| \frac{|z - t|}{|\tau - z||\tau - t|} \le c_2 \frac{\left| \ln|\tau - t| \right|}{|\tau - t|}.$$

Из (6) и (7) получаем аналогичную оценку:

$$I_{12} \le c_3 \frac{\left| \ln|\tau - t| \right|}{|\tau - t|}.$$

Итак, при $t - \delta < \tau < t$

$$\left| \left( \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right) \right| \le c_4 \frac{\left| \ln|\tau - t| \right|}{|\tau - t|}. \tag{8}$$

Когда $t < \tau < t + \delta$, получаем аналогичную оценку для (3):

$$\left| \left( \frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} \right) \right| \le c_5 \frac{\left| \ln|\tau - t| \right|}{|\tau - t|}. \tag{9}$$

Если учесть условие Гёльдера и выбирать нужное δ, то из (8) и (9) получим неравенство

$$I_1 + I_3 \le c_6 \int\limits_0^{\delta} \frac{\ln\left(x^{-1}\right)}{x^{1-\mu}} dx \le c_\mu \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\delta^{\mu} < \varepsilon. \tag{10}$$

Пусть $0 < \tau < t - \delta$. Теперь

$$\ln\delta < \ln|z-\tau| < \ln\frac{5}{4} < \ln\frac{1}{\delta}.$$

Тогда

$$\left|\ln|z-\tau|\right| < \ln\frac{1}{\delta}, \tag{11}$$

$$\left|\arg(\tau - z)\right| \le \pi \le \frac{\pi}{\ln 4}\ln\frac{1}{\delta}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует неравенство

$$\left|\ln(\tau - z)\right| < c_7 \ln\frac{1}{\delta}. \tag{13}$$

Итак, из (13) при $0 < \tau < t - \delta$

$$\left|\left(\frac{\ln(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\ln^{+}(\tau - t)}{\tau - t}\right)\right| \le c_7 \frac{\ln\frac{1}{\delta}}{\delta^2}|z - t|.$$

Теперь при достаточно малом $|z - t|$ получим неравенство $I_2 < \varepsilon$. Аналогично находим, что $I_4 < \varepsilon$. Из этих оценок и неравенства (10) следует утверждение леммы для случая $n = 1$. Поскольку

$$\frac{\ln^{n+1}(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\left(\ln^{+}(\tau - t)\right)^{n+1}}{\tau - t} = \ln(\tau - z)\left(\frac{\ln^{n}(\tau - z)}{\tau - z} - \frac{\left(\ln^{+}(\tau - t)\right)^{n}}{\tau - t}\right) +$$

$$+ \frac{\left(\ln^{+}(\tau - t)\right)^{n}}{\tau - t}\left(\ln(\tau - z) - \ln^{+}(\tau - t)\right),$$

то для общего случая ($n > 1$) можно применить метод математической индукции. Лемма доказана.

Для предельных значений интегралов (1) введем следующие обозначения:

$$\Phi_n^{+}(t) = \lim_{y \to 0+} \Phi_n(t + iy), \ \Phi_n^{-}(t) = \lim_{y \to 0-} \Phi_n(t + iy).$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть* $t \in (0; 1)$ *и интегралы* $\Psi_n(t)$ *заданы формулами (2). Тогда справедливы следующие предельные формулы:*

$$\Phi_n^{+}(t) = \Psi_n(t) - \frac{\varphi(t)}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\pi i)^{n-k+1} \ln^k t\right) + \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (-\pi i)^{n-k} \ln^k |t - \tau|\right) d\tau, \tag{14}$$

$$\Phi_n^{-}(t) = \Psi_n(t) - \frac{\varphi(t)}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\pi i)^{n-k+1} \ln^k t\right) + \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (\pi i)^{n-k} \ln^k |t - \tau|\right) d\tau. \tag{15}$$

*Если* $t \in (1; \infty)$, *то*

$$\Phi_n^{\pm}(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\mp \pi i)^{n-k} \Psi_k(t). \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство для $n = 1$ и $t \in (0; 1)$. С одной стороны, поскольку

$$\Psi_t(z) = \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))\ln(\tau - z)}{\tau - z} d\tau = \Phi_1(z) - \frac{\varphi(t)}{2}\left(\ln^2(1 - z) - \ln^2(-z)\right),$$

то

$$\Psi_t^+(t) = \Phi_1^+(t) - \frac{\varphi(t)}{2}\left(\ln^2(1 - t) - (\ln t - \pi i)^2\right). \quad (17)$$

С другой стороны, по лемме 2

$$\Psi_t^+(t) = \int_0^1 \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))\ln^+(\tau - t)}{\tau - t} d\tau = \int_0^1 \frac{\ln|\tau - t|(\varphi(\tau) - \varphi(t))}{\tau - t} d\tau -$$

$$- \pi i \int_0^t \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))}{\tau - t} d\tau = \Psi_1(t) - \frac{\varphi(t)}{2}\left(\ln^2(1 - t) - (\ln t)^2\right) - \pi i \int_0^t \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))}{\tau - t} d\tau.$$

Если учесть формулу (17), то можно найти

$$\Phi_1^+(t) = (\Psi_1)(t) + \frac{\pi^2}{2}\varphi(t) + \pi i \varphi(t)\ln t - \pi i \int_0^t \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau.$$

Аналогично можно получить формулу для функции $\Phi_1^-(t)$, а также рассмотреть случай $n > 1$. Доказательство формулы (16) проводится так же, как и в случае особого интеграла типа Коши [1; 2].

С помощью формул (14) и (15) можно получить аддитивное представление для сингулярных интегралов (2). Ограничимся случаем $n = 1$.

**Теорема 2.** *Справедлива следующая формула:*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln|\tau - t|}{\tau - t} d\tau = -\frac{\pi^2}{2}\varphi(t) + \ln(1 - t)\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln\dfrac{\tau}{1 - \tau}}{\tau - t} d\tau - \int_0^1 \frac{R\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad (18)$$

*где*

$$R\varphi(\tau) = \int_0^\tau \frac{\varphi(x) - \varphi(\tau)}{x - \tau} dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим три интеграла типа Коши:

$$F_1(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln\tau}{\tau - z} d\tau, \;\; F_2(z) = \int_0^1 \frac{\psi_2(\tau)}{\tau - z} d\tau, \;\; F_3(z) = \int_1^\infty \frac{\psi_3(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где

$$\psi_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{\varphi(x) - \varphi(\tau)}{x - \tau} dx, \;\; \psi_3(\tau) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x - \tau} dx.$$

Из свойств интегралов типа Коши [1; 2] следует, что функции $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$ имеют интегрируемые особенности в точках $z = 0$, $z = 1$ и стремятся к нулю, когда $z$ стремится к бесконечности. Кроме того, из теоремы 2 получим при $t \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \left(F_1^+(t) - F_2^+(t) - F_3^+(t)\right) - \left(F_1^-(t) - F_2^-(t) - F_3^-(t)\right).$$

Тогда из принципа аналитического продолжения следует, что

$$\Phi_1(z) = F_1(z) - F_2(z) - F_3(z).$$

Если теперь расписать это равенство для $t \in (0; 1)$ как

$$\Phi_1^+(t) = F_1^+(t) - F_2^+(t) - F_3^+(t),$$

то после преобразований получим формулу (18) при $n = 1$.

## Библиографические ссылки

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968.

## References

1. Gakhov F. D. [Boundary value problems]. Moscow : Nauka, 1977 (in Russ.).
2. Muskhelishvili N. I. [Singular integral equations]. Moscow : Nauka, 1968 (in Russ.).

*Статья поступила в редколлегию 20.03.2017.*
*Received by editorial board 20.03.2017.*