ВЛИЯНИЕ ВАРИАЦИИ И КОРРЕЛЯЦИИ В ПРОЦЕССЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ $BMAP|SM|1|N$

Г. Царенков

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

gtsarenkov@tut.by

В данной работе рассматривается влияние вариации и корреляции полумарковского процесса обслуживания в системах с групповым марковским входным потоком и конечным буфером.

Ключевые слова: системы с потерями, вариация в процессе обслуживания, корреляция в процессе обслуживания, численная реализация.

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании современных телекоммуникационных сетей с коррелированными потоками информации большую популярность приобрели модели на основе группового марковского потока (BMAP – Batch Markovian Arrival Process). Применение теории систем массового обслуживания (СМО) и моделей с $BMAP$-потоком позволяет проводить аналитические исследования таких сетей. Разработанные численные алгоритмы для подобных систем допускают достаточно широкое изменение корреляции и вариации входного потока и исследовать их влияние на характеристики системы. Примером подобного исследования является работа [1].

Что касается процесса обслуживания, то влияние вариации и корреляции в нем на характеристики системы пока исследовано мало, а имеющиеся результаты получены для простых моделей. Например, в работе [2] исследование проводилось для случая рекуррентного обслуживания. В данной работе мы будет рассматривать влияние вариации и корреляции полумарковского процесса обслуживания на характеристики модели $BMAP|SM|1|N$.

В реальной жизни вариация и корреляция процесса обслуживания может быть обусловлена неравномерной нагрузкой оборудования (чрезмерно большое количество подключений или преобладание определенного вида трафика) или высокими накладными расходами (системы учета подключений/оплаты или мониторинга трафика).

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Поступление требований в *BMAP*-потоке определяется управляющим марковским процессом ν_t, $t > 0$ с непрерывным временем и пространством состояний $\{0, \dots, W\}$, во время переходов которого между состояниями в систему поступают группы требований (при этом допускается поступление групп нулевого размера). Входной поток, следуя [3], будем задавать матричной производящей функцией

$$D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k, \qquad |z| \le 1, \tag{1}$$

где элементы матриц D_k характеризуют интенсивности переходов управляющего процесса ν_t, $t > 0$, при поступлении в систему группы заявок размера k, $k \ge 0$.

Основными характеристиками группового потока являются

- $\boldsymbol{\theta}$ – вектор-строка, компоненты которой характеризуют стационарные вероятности пребывания управляющего процесса BMAP-потока в своих состояниях. При этом вектор $\boldsymbol{\theta}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta} D(1) = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{e} = 1, \end{cases} \tag{2}$$

  где $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}$ – векторы, состоящие из 0 и 1 соответственно.
- λ – интенсивность входного потока $\lambda = \boldsymbol{\theta} D'(z)|_{z=1}\boldsymbol{e}$.
- λ_g – интенсивность поступления групп $\lambda_g = \boldsymbol{\theta}(D(1) - D_0)\boldsymbol{e}$.
- c_{var} коэффициент вариации длительности интервала между двумя последовательными моментами поступления групп требований

$$c_{var}^{BMAP} = \sqrt{2\lambda_g \boldsymbol{\theta}(-D_0)^{-1}\boldsymbol{e} - 1}. \tag{3}$$

- c_{corr} коэффициент корреляции длительностей двух последовательных интервалов между поступлениями групп требований

$$c_{corr}^{BMAP} = \frac{\boldsymbol{\theta}(-D_0)^{-1}(D(1) - D_0)(-D_0)^{-1}\boldsymbol{e} - \lambda_g^{-1}}{2\boldsymbol{\theta}(-D_0)^{-1}\boldsymbol{e} - \lambda_g^{-1}}. \tag{4}$$

Полумарковский процесс обслуживания m_t, $t > 0$, полностью описывается пространством состояний $\{1, \dots, M\}$ и ядром $\nabla(t)$. Элементы матричной функции $\nabla(t)$ определяют вероятность того, что переход процесса m_t из одного состояния в другое (возможно тоже самое) произойдет не позже момента времени $t > 0$. Очевидно, что численная реализация алгоритмов расчета характеристик с ядром $\nabla(t)$ общего вида представляет сложную проблему. Достаточно хорошо для аналитических исследований и численных экспериментов подходит полумарковское ядро следующего вида:

$$\nabla(t) = \mathrm{diag}\{B_1(t), \dots, B_M(t)\}\, P, \tag{5}$$

где $B_m(t)$ – функция распределения длительности обслуживания, когда полумарковский процесс m_t, $t > 0$ находится в состоянии m, $m = \overline{1, M}$, P – матрица переходов процесса во вложенные моменты времени. Ядро такого вида использовалось при расчете численных примеров в [6].

Под вариацией полумарковского процесса будем понимать вариацию длительности интервала времени обслуживания. При этом она будет вычисляться по формуле:

$$c_{var}^{SM} = \sqrt{b_2 b_1^{-2} - 1}, \qquad (6)$$

где $b_i = \delta \mathrm{diag}\left\{b_i^{(1)}, \ldots, b_i^{(M)}\right\} \boldsymbol{e}$, $i = \overline{1,2}$, где вектор $\boldsymbol{\delta}$ – вектор-строка стационарного распределения вероятностей процесса m_t, $t \geq 0$, во вложенные моменты времени. Для ядра вида (5) вектор $\boldsymbol{\delta}$ удовлетворяет следующей системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta P} = \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\delta e} = 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Под корреляцией полумарковского процесса будем понимать корреляцию длительностей двух последовательных интервалов обслуживания. Если обозначить через ξ_1 и ξ_2 длительности двух последовательных интервалов обслуживания, то корреляция в процессе обслуживания будет определяться следующей формулой:

$$c_{corr}^{SM} = \frac{\mathrm{E}\{[\xi_1 - \mathrm{E}(\xi_1)][\xi_2 - \mathrm{E}(\xi_2)]\}}{b_2 - b_1^2}, \qquad (8)$$

где E – символ математического ожидания.

Наиболее существенным является определение $\mathrm{E}\,\eta$, где $\eta = \xi_1 \xi_2$.

Лемма 1. *Для полумарковского ядра* (5) *математическое ожидание* $\mathrm{E}\,\eta$ *выражается следующей формулой*

$$\mathrm{E}\,\eta = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \delta_i b_1^{(i)} p_{ij} b_1^{(j)}. \qquad (9)$$

Таким образом, формула (8) для ядра вида (5) с учетом выражения (9) примет вид

$$c_{corr}^{SM} = \frac{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \delta_i b_1^{(i)} p_{ij} b_1^{(j)} - \left(\sum_{i=1}^{M} \delta_i b_1^{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{M} \delta_i b_2^{(i)} - \left(\sum_{i=1}^{M} \delta_i b_1^{(i)}\right)^2}, \qquad (10)$$

где δ_i, $i = \overline{1,M}$, – компоненты вектора $\boldsymbol{\delta}$ стационарного распределения вероятностей процесса m_t, $t > 0$.

В исследуемой системе предусмотрен конечный буфер размера N. В случае, если в буфере не достаточно места для всей поступившей группы требований, то часть требований, для которой не хватило места, теряется.

Исследование системы $BMAP|SM|1|N$ с использованием метода вложенных цепей Маркова приведено в работе [4]. Система $BMAP|SM|1|N$ характеризуется трехмерным случайным процессом $\{i_t, \nu_t, m_t\}$, $t > 0$, где i_t – количество требований в системе в момент времени $t > 0$, $0 \le i_t \le N+1$, ν_t – состояние управляющего процесса $BMAP$-потока в момент времени $t > 0$, $0 \le \nu_t \le W$, m_t – состояние полумарковского процесса m_t, $t > 0$, $1 \le m_t \le M$.

Поскольку процесс $\{i_t, \nu_t, m_t\}$, $t > 0$, не является марковским, рассмотрим трехмерную цепь Маркова $\{i_n, \nu_n, m_n\}$, где i_n – количество требований в системе в момент $t_n + 0$ n-ого окончания обслуживания $n > 0$, $i_n = \overline{0, M}$, ν_n – состояние управляющего процесса $BMAP$-потока в момент времени $t_n - 0$, m_n – состояние полумарковского процесса обслуживания в момент $t_n + 0$, t_n – момент n-ого окончания обслуживания $n > 0$. Рассматривая стационарные вероятности $\pi(i, \nu, m) = \lim\limits_{n\to\infty} P\{i_n = i, \nu_n = \nu, m_n = m\}$, $i = \overline{0, n}$, $\nu = \overline{0, W}$, $m = \overline{1, M}$ и группируя их в векторы $\boldsymbol{\pi}_i = \{\pi(i,0,1), \dots, \pi(i,0,M), \pi(i,1,1), \dots, \pi(i,1,M), \dots, \pi(i,W,1), \dots, \pi(i,W,M)\}$, $i = \overline{0, N}$ можно получить следующие уравнения:

$$\boldsymbol{\pi}_l = \boldsymbol{\pi}_0 V_l + \sum_{i=1}^{l+1} \boldsymbol{\pi}_i Y_{l+1-i}, \qquad l = \overline{0, N-1}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\pi}_N = \boldsymbol{\pi}_0 \left(V(1) - \sum_{l=0}^{N-1} V_l \right) + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\pi}_i \left(Y(1) - \sum_{l=0}^{N-1} Y_l \right), \tag{12}$$

где Y_i, $i \ge 0$, и V_l, $l \ge 0$, – коэффициенты разложения следующих матричных производящих функций

$$Y(z) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l z^l = \int_0^{\infty} \exp\{D(z)t\} \otimes dB(t), \tag{13}$$

$$V(z) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l z^l = \frac{1}{z}(-\tilde{D}_0)^{-1}(\tilde{D}(z) - \tilde{D}_0) Y(z), \quad \tilde{D}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{D}_k z^k = D(z) \otimes I_M, \tag{14}$$

$\otimes$ – символ Кронекерова произведения матриц, I. – единичная матрица соответствующей размерности. С учетом условия нормировка из уравнений (11)-(12) можно вычислить векторы $\boldsymbol{\pi}_i$, $i = \overline{0, N}$ (см. работу [4]).

Вводя аналогичным образом векторы $\boldsymbol{p}_i$, $i = \overline{0, N+1}$, стационарных вероятностей в произвольный момент времени для них можно получить следующее выражение

$$\boldsymbol{p}(z) = \sum_{i=0}^{N+1} \boldsymbol{p}_i z^i = \tau^{-1} \sum_{i=0}^{N} \boldsymbol{\pi}_i z^i (z((I \otimes P)^{-1} - I), \tag{15}$$

где $\tau = \pi_0(-\tilde{D}_0)^{-1}\boldsymbol{e} + b_1$. Разработке алгоритма расчета векторов $\boldsymbol{p}_i$, $i = \overline{0, N+1}$, посвящена работа [5].

Одной из важнейших характеристик систем с ограниченным буфером является вероятность P_{loss} потери требования. Для нашей системы она вычисляется следующим образом

$$P_{loss} = 1 - \frac{1}{\tau\lambda}. \tag{16}$$

Помимо этого, зная стационарные вероятности, можно рассчитать среднюю длину очереди в системе

$$L_{emb} = \sum_{i=1}^{N} i\boldsymbol{\pi}_i\mathbf{e}, \qquad L_{arb} = \sum_{i=1}^{N+1} i\mathbf{p}_i\mathbf{e}, \tag{17}$$

где L_{emb} и L_{arb} – средние длины очередей в моменты окончания обслуживания и в произвольный момент времени соответственно.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Цель данного численного эксперимента показать, что вариация и корреляция в процессе обслуживания оказывают влияние на характеристики системы.

Параметры входного потока во всех расчетах одинаковы, их значения приведены в таблице 1, размер буфера полагается равным $N = 10$.

Таблица 1 *BMAP*-**поток с интенсивностью** $\lambda = 10$, **интенсивностью групп** $\lambda_g = 5$, **коэффициентом корреляции** $c_{corr} = 0.2$, **коэффициентом вариации** $c_{var} = 3.5033$

Матрица D_0		Матрица $D_1 = D_3$		Матрица D_2	
−6.74538	5.45412×10^{-6}	2.01021	0.0134084	2.68027	0.0178778
5.45412×10^{-6}	−0.219455	0.036728	0.0291068	0.0489707	0.038809

Процесс обслуживания имеет два состояния. В первом состоянии время обслуживания является постоянным с параметром T, а во втором – имеет равномерное распределение на интервале $[t_1, t_2)$ (см. таблицу 2). Загрузка системы равна 0.5.

Таблица 2 **Параметры полумарковских процессов обслуживания с фундаментальным средним** $b_1 = 0.05$

№	c_{corr}^{SM}	c_{var}^{SM}	$B_1(t)$	$B_2(t)$	Матрица P	
SM_1	0.9	1	$T = 9.53674 \times 10^{-6}$	$t_1 = 0.058594$ $t_2 = 0.132$	0.996659 0.003027	0.003341 0.996973
SM_2	0.9	3.1622	$T = 9.53674 \times 10^{-6}$	$t_1 = 0.273438$ $t_2 = 0.752246$	0.997313 0.024874	0.00269 0.975126
SM_3	0.1	1	$T = 0.000305176$	$t_1 = 0.000152588$ $t_2 = 0.150308$	0.468988 0.269596	0.531012 0.730404
SM_4	0.1	3.1622	$T = 0.000244141$	$t_1 = 0.00012207$ $t_2 = 0.828558$	0.896415 0.758507	0.103585 0.241493
SM_5	0.1	0.31622	$T = 0.000305176$	$t_1 = 0.0292969$ $t_2 = 0.0742262$	0.310045 0.024457	0.689955 0.975543
SM_6	0.9	0.31622	$T = 9.53674 \times 10^{-6}$	$t_1 = 0.0478516$ $t_2 = 0.0615764$	0.958682 0.003896	0.041318 0.996104

Таблица 3 **Результаты расчета характеристик системы** $BMAP|SM|1|N$

Процесс обслуживания	L_{emb}	L_{arb}	$\pi_0 e$	$p_0 e$	P_{loss}
SM_1	3.870320	3.180910	0.248726	0.563858	0.127714
SM_2	1.557000	3.338430	0.443462	0.658452	0.316904
SM_3	3.071000	2.008080	0.184606	0.514651	0.029304
SM_4	2.915740	2.796080	0.271320	0.580933	0.161865
SM_5	2.891420	1.777800	0.176107	0.507228	0.014456
SM_6	3.018250	1.900570	0.178729	0.509430	0.018861

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из численных примеров корреляция и вариация в процессе обслуживания оказывают существенное влияние на характеристики модели. Например, значение вероятности потери может отличаться в разы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kim C.S., Klimenok V.I., Orlovsky D.S., Dudin A.N.* Lack of invariant property of the Erlang loss model in case of MAP input // Queueing Systems, 2005. V. 49. № 2. С. 187–213.
2. *Дудин А.Н., Листопад Н.И., Царенков Г.В.* Улучшенный алгоритм оптимизации работы узла сети Internet // Проблемы проектирования информационно-телекоммуникационных систем. Сборник науч. труд. под ред. Курбацкого А.Н. С. 28-43.
3. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics - Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
4. *Дудин А.Н., Клименок В.И. Царенков Г.В.* Расчет характеристик однолинейной системы обслуживания с групповым марковским потоком, полумарковским обслуживаннием и конечным буфером // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 87-101.
5. *Tsarenkov G.V., Dudin A.N., Klimenok V.I.* Robust algorithm for evaluating the stationary probabilities of BMAP|SM|1|N queue // "Computer Data Analysis and Modelling" (Proceedings of the 6th International Conference). Minsk. 2001. V. 3, P. 123-130.
6. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн.: БГУ, 2000.– 176 с.: ил.