О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКОЙ НМ-СЕТИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

О. Сытая, С. Статкевич

ГрГУ им. Я.Купалы

г.Гродно, Республика Беларусь

sytaya_om@mail.ru

В работе рассматривается решение задачи оптимального управления, предназначенной для НМ-сети с приведением и без приведения будущих доходов к текущему времени в случае конечного и бесконечного горизонта управления.

Ключевые слова: НМ-сеть, РДУ, доход сети, задача оптимального управления, логистика.

В настоящее время в связи с развитием процессов информатизации, информационно-компьютерных систем и сетей, сетей связи и передачи данных, глобализацией экономических связей и структур, развитием логистических транспортных систем (ЛТС), усложнением процессов производства продукции и т.п. весьма актуальными становятся сетевые модели, с достаточно высокой степенью адекватности описывающие эти процессы и помогающие тем-самым находить рациональные решения для таких сложных систем. Одними из наиболее часто применяющихся сетевых моделей, связанных с взаимоувязкой во времени процессов функционирования множества разнородных подсистем, из которых состоят вышеуказанные сложные системы, являются сети МО. Возникнув как модели ЭВМ и сетей ЭВМ, они достаточно интенсивно расширяют области своего применения, например, являются адекватными математическими моделями многих реальных систем и процессов в экономике, производстве, здравоохранении и других областях.

Рассматриваемые задачи управления актуальны, поскольку построение оптимального управления позволяет уменьшить степень неопредел нности при принятии управленческих решений. Полученные результаты могут быть использованы для выявления наибольших расходов и последующего их оптимального уменьшения по различным направлениям.

В данной работе рассматривается марковская НМ-сеть с однотипными заявками, являющаяся стохастической моделью ЛТС.

Каждый переход заявки между СМО сети сопровождается некоторым доходом для системами массового обслуживания СМО, из которой она выходит.

Рассмотрим замкнутую марковскую НМ-сеть с однотипными заявками, состоящую из $M = n + m_1 + \ldots + m_{n-1}$ систем обслуживания S_i, $i = 1, \ldots n, 1_1, \ldots, 1_{m_1}, \ldots, (n-$

$1)_1, \ldots, (n-1)_{m_{(n-1)}}$, изображ нную на рис. 1, которая является моделью транспортировки некоторого товара. В данной модели система S_n – это "завод", который производит некоторый товар; системы $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ – "склады", на которых осуществляется хранение данного товара; $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{m_i}}$ – "магазины" (пункты реализации товара), который поступает со склада S_i, $i = \overline{1, (n-1)}$. При этом под заявкой понимается перевозка товара в логистической системе "завод – склады – пункты реализации товара".

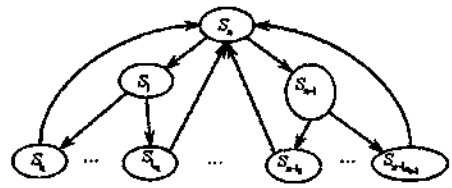

Рис. 1. Сетевая модель транпортировки товара

Под состоянием сети в момент времени t будем понимать вектор $(k, t) = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots, k_{1_1}, \ldots, k_{1_{m_1}}, \ldots, k_{(n-1)_1}, \ldots, k_{(n-1)_{m_{(n-1)}}}, t)$, где k_i – число заявок в системе S_i в момент времени t, $i \in X$.

Через $v_n(k, t)$ обозначим полный ожидаемый доход, который получает система S_n за время t, если в начальный момент времени сеть была в состоянии k. Пусть НМ-сеть находиться в состоянии (k, t). Предположим, что система S_n получает доход в размере $r_n(k)$ у. е. за единицу времени в течении всего периода пребывания сети в состоянии k. Если она остается в состоянии (k, t) в течение интервала времени Δt, то ожидаемый доход системы S_n составит $r_n(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_n(k, t)$, который она принесет за оставшиеся t единиц времени. Вероятность такого события равна $1 - \sum_{j \in X} \mu_j u(k_j)\Delta t + o(\Delta t)$, где $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$ – функция Хевисайда. Когда сеть за время Δt совершает переход из состояния (k, t) в состояние $(k - I_j + I_n, t + \Delta t)$ с вероятностью $\mu_j u(k_j)\Delta t + o(\Delta t)$, она приносит системе S_n доход в размере $-r_{jn}(k - I_j + I_n, t)$, и ожидаемый доход системы S_n составит $-r_{jn}(k - I_j + I_n, t)$ плюс ожидаемый доход $v_n(k - I_j + I_n, t)$, который будет получен за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было $(k - I_j + I_n)$, $j \in X_0$. При данном переходе происходит либо возврат товара из системы "магазин", либо транспорт приходит пустым, а это в свою очередь означает, что система S_n поносит убытки в размере $r_{jn}(k - I_j + I_n, t)$, $j \in X_0$.

Для ожидаемого дохода системы S_n сети $v_n(k, t)$ можно записать систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\frac{dv_n(k, t)}{dt} = r_n(k) - v_n(k, t) \sum_{j \in X} \mu_j u(k_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \mu_n u(k_n) p_{nj} \left(r_{nj}(k - I_n + I_j, t) + v_n(k - I_n + I_j, t) \right) +$$

$$+\sum_{j\in X_0}\mu_j u(k_j)\left(v_n(k-I_j+I_n,t)-r_{jn}(k-I_j+I_n,t)\right)+$$

$$+\sum_{\substack{s=\overline{1,n-1}\\ c=s_1,s_2,\dots,s_{m_s}}}\mu_s u(k_s)p_{sc}v_n(k-I_s+I_c,t).$$

Если переобозначить состояния сети $l = 1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{N}$, то она может быть представлена в матричном виде:

$$\frac{dV_n(t)}{dt}=Q_n(t)+AV_n(t). \quad (1)$$

Задача оптимального управления для НМ-сети описана в работе [1].

Задача оптимального управления заключается в нахождении управления, максимизирующего эффективность функционирования сети на заданном интервале управления

$$\xi(\bar{\bar{\theta}}^*)=\max_{\bar{\bar{\theta}}}\xi(\bar{\bar{\theta}}),$$

где $\bar{\bar{\theta}}$ – выбранное управление.

Рассмотрим два случая, уточняющих постановку.

1. Конечный горизонт управления $T_{\max} < \infty$ с учетом или без учета переоценки, $\beta \in (0;1]$. Нужно найти управление $\bar{\bar{\theta}}^*$, максимизирующее полный ожидаемый доход системы S_n

$$V_n(T_{\max},\bar{\bar{\theta}}^*)\to\max_{\bar{\bar{\theta}}}, \quad (2)$$

где $\bar{\bar{\theta}}=(\hat{\theta}(t),\hat{\theta}(t+\Delta t),\dots,\hat{\theta}(T_{\max}))$.

2. Бесконечный горизонт управления $T_{\max} = \infty$. В этом случае будем искать оптимальное управление в классе стационарных управлений $\bar{\bar{\theta}}=(\hat{\theta},\hat{\theta},\dots)$, то есть политик, не зависящих от времени. Тогда оптимальная политика $\bar{\theta}^*$ определяется как решение задач:

2.1) при $\beta < 1$

$$V_{n,\beta,\infty}(\bar{\theta}^*)\to\max_{\bar{\theta}}, \quad (3)$$

2.2) при $\beta = 1$

$$G_n(\bar{\theta}^*)\to\max_{\bar{\theta}},$$

где $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$, $\theta_i \in \Theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$; $V_{n,\beta,\infty}(\bar{\theta}) = \hat{Q}_n^{\bar{\theta}}\left(1 - \beta\hat{A}_n^{\bar{\theta}}\right)^{-1}$ – вектор предельных доходов (или предельный доход); $G_n(\bar{\theta}) = R^{\bar{\theta}}\left(A_n^{\bar{\theta}}\right)^T$ – вектор прибылей (или прибыль).

Для определения оптимального управления и соответствующего ему оптимального ожидаемого дохода воспользуемся методом динамического программирования Беллмана.

Оптимальный ожидаемый доход НМ-сети в произвольный момент времени t_m ($t_m \leq T_{\max}$) можно найти из соотношения (3).

$$V_{n,\beta}^*(t_m) = \max_{\bar{\theta}(t_1),...,\bar{\theta}(t_{m-1}),\theta(t_m)} V_n(t_m, \bar{\theta}(t_1), ..., \bar{\theta}(t_{m-1}), \theta(t_m)) =$$

$$= \max_{\theta(t_m)} \max_{\bar{\theta}(t_1),...,\bar{\theta}(t_{m-1})} \left[\hat{Q}_n^{\theta(t_m)} + \beta\hat{A}_n^{\theta(t_m)} V_{n,\beta}(t_{m-1}, \bar{\theta}(t_1), ..., \bar{\theta}(t_{m-2}), \theta(t_{m-1})\right] =$$

$$= \max_{\theta(t_m)} \left[\hat{Q}_n^{\theta(t_m)} + \beta\hat{A}_n^{\theta(t_m)} \max_{\bar{\theta}(t_1),...,\bar{\theta}(t_{m-2}),\theta(t_{m-1})} V_{n,\beta}(t_{m-1}, \bar{\theta}(t_1), ..., \bar{\theta}(t_{m-2}), \theta(t_{m-1}))\right] =$$

$$= \max_{\theta(t_m)} \left[\hat{Q}_n^{\theta(t_m)} + \beta\hat{A}_n^{\theta(t_m)} V_{n,\beta}^*(t_{m-1})\right] = \hat{Q}_n^{\theta^*(t_m)} + \beta\hat{A}_n^{\theta^*(t_m)} V_{n,\beta}^*(t_{m-1}).$$

При достижении $t_m = T_{\max}$ можно определить оптимальное управление $\bar{\bar{\theta}}^*$ марковской НМ-сети.

Пример. Рассмотрим сеть, состоящую из M =7 систем обслуживания с количеством заявок равным K =8, $\Delta t = 0.05$. Число состояний равно $C_{7+8-1}^{7-1} = 3003$.

Завод, производящий товар, планирует произвести рекламную акцию. Будем рассматривать 2 стратегии: 1) произвести рекламную акцию; 2) рекламную акцию не проводить.

В зависимости от того, какая будет выбрана стратегия будет различнойи: матрица вероятностей переходов заявок (без рекламы и с рекламой соответственно):

$$P^{(\theta_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.45 \\ 0.35 & 0.65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$P^{(\theta_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0.35 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть матрицы одношаговых доходов при переходе заявок между СМО имеют вид:

$$R^{(\theta_1)} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } R^{(\theta_2)} = \begin{pmatrix} 7.4 & 0 & 0 & 6 & 2.2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6.1 \\ 3.6 & 4 & 4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5 & 0 & 8.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.6 \end{pmatrix}.$$

Интенсивности обслуживания заявок при различных стратегиях:

$$\begin{pmatrix} 0.63 & 0.25 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.29 & 0.35 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0.86 & 0.5 & 0.61 & 0.35 & 0.3 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

Необходимость использования стратегии в каждом состоянии отразим с помощью таблицы 1.

Таблица 1 – Выбор стратегии для системы “завод” на каждом интервале

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Здесь, например, строка є8 в таблице 1 говорит о том, что при начальном состоянии $(3, 2, 0, 0, 0, 0, 0)$ рекламную акцию проводить не следует. На рис.2, изображены ожидаемые доходы системы S_n при данном управлении.

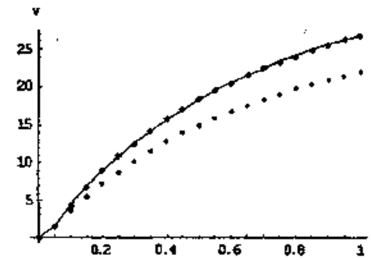

Рис. 2. Ожидаемый доход системы "завод" $v_3(3, 2, 0, 0, 0, 0, 0, t)$, *при данной политике*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матальцкий М. А.* Задача оптимального управления для марковской НМ-сети / М.А. Матальцкий, О.М. Сытая // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. Тезисы докладов муждународной научной конференции – Минск: БГУ, 2008. – 116-117с.