ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЕТИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

Е. Судыко*, С. Цой, А. Назаров

Томский государственный университет

Томск, Россия

*ESudyko@yandex.ru

В работе рассмотрена сеть связи с оповещением о конфликте и конечным числом станций. Полученны асимптотики первого, второго и третьего порядков для характеристической функции процесса изменения числа заявок в источнике повторных вызовов.

Ключевые слова: случайные процессы, теория массового обслуживания, асимптотический анализ, система с повторными вызовами, оповещением о конфликте и конечным числом станций.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассмотрим сеть связи случайного доступа с конечным числом станций. Здесь общий ресурс(моноканал) объединяет конечное N число абонентских станций. Доступ к общему ресурсу реализуется протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте. Любая из N абонентских станций, сформировав свое сообщение, отправляет его на общий ресурс(моноканал). И если ресурс свободен, то начинает осуществляться немедленная передача сообщения, которая заканчивается успешно, если в это время другие сообщения не поступали. Если же во время передачи одного сообщения поступает другое, то происходит наложение сигналов, в результате чего сообщения искажаются. В этом случае говорят о ситуации конфликта. Сообщения, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, считаются искаженными, переходят в так называемый источник повторных вызовов (ИПВ), откуда вновь подаются на обслуживание после случайной задержки.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В качестве математической модели сети случайного доступа с конечным числом абонентских станций рассмотрим однолинейную СМО, на вход которой поступает примитивный поток заявок, параметр которого зависит от числа заявок в источнике повторных вызовов. Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания, продолжительность которого имеет экспоненциальное с параметром μ_1

распределение. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), а на приборе начинается этап оповещения о конфликте, продолжительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_2. В ИПВ заявки осуществляют задержку, ее продолжительность имеет экспоненциальное распределение с параметром $\frac{\sigma}{N}$. Из ИПВ после случайной задержки каждая заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

- $k(t) = 0$, если прибор свободен;
- $k(t) = 1$, если прибор занят;
- $k(t) = 2$, если прибор находится в состоянии оповещения о конфликте.

Если система находится в состоянии $\{k, i\}$, то суммарный входящий поток заявок является примитивным с интенсивностью $\frac{\lambda(N-i)}{N}$, если прибор находится в одном из двух состояний $k(t) = 0$ или $k(t) = 2$, $\frac{\lambda(N-i-1)}{N}$, если прибор находится в состоянии $k(t) = 1$. Процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

3. ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Обозначим
$P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P(k, i, t)$, $k(t) = \overline{0, 2}$, $i = 0, 1, 2\ldots$

Не трудно показать, что распределение вероятностей $P(k, i, t)$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(0,i,t)}{\partial t} = -\left(\lambda\frac{N-i}{N} + \sigma\frac{i}{N}\right)P(0,i,t) + \mu_1 P(1,i,t) + \mu_2 P(2,i,t),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(1,i,t)}{\partial t} &= -\left(\lambda\frac{N-i-1}{N} + \sigma\frac{i}{N} + \mu_1\right)P(1,i,t) + \lambda\frac{N-i}{N}P(0,i,t) + \\ &+\sigma\frac{i+1}{N}P(0,i+1,t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(2,i,t)}{\partial t} &= -\left(\lambda\frac{N-i}{N} + \mu_2\right)P(2,i,t) + \lambda\frac{N-(i-1)}{N}P(2,i-1,t) + \\ &+\lambda\frac{N-(i-1)}{N}P(1,i-2,t) + \sigma\frac{i-1}{N}P(1,i-1,t),\end{aligned}$$

из которой получим систему уравнений для функций $H(k,u,t) = \sum e^{jui}P(k,i,t)$, представленную в матричном виде, обозначив вектор-строку $H(u,t) = \{H(0,u,t), H(1,u,t),\ H(2,u,t)\}$.

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} + \frac{j}{N}\frac{\partial H(u,t)}{\partial u}A(ju) = H(u,t)B(ju) + \frac{1}{N}H(u,t)C(ju), \tag{1}$$

где матрицы $A(ju)$, $B(ju)$ и $C(ju)$ имеют вид:

$$A(ju) = \begin{pmatrix} -(\sigma-\lambda) & (\sigma e^{ju}-\lambda) & 0 \\ 0 & -(\sigma-\lambda) & e^{ju}(\sigma-\lambda e^{ju}) \\ 0 & 0 & \lambda(1-e^{ju}) \end{pmatrix}$$

$$B(ju) = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda) & \lambda e^{2ju} \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda(1-e^{ju})+\mu_2) \end{pmatrix}$$

$$C(ju) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda e^{2ju} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полученное равенство (1) будем называть основным уравнением, решение которого найдем при помощи метода асимптотического анализа [3].

4. АСИМПТОТИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для нахождения асимптотики первого порядка в основном уравнении (1) сделаны замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad t\varepsilon = \tau, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u,t) = F_1(w,\tau,\varepsilon), \tag{2}$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{1}{N}\frac{\partial F_1(w,\tau,N)}{\partial \tau} + j\frac{\partial F_1(w,\tau,N)}{\partial w}A\left(j\frac{1}{N}w\right) = F_1(w,\tau,N)B\left(j\frac{1}{N}w\right) +$$

$$+\frac{1}{N}F_1(w,\tau,N)C\left(j\frac{1}{N}w\right). \tag{3}$$

Теорема 1. *Решение $F_1(w,\tau,N)$ уравнения (3) имеет вид*

$$F_1(w,\tau) = R\exp\{jw\kappa_1(\tau)\}, \tag{4}$$

где вектор R не зависит от w, имеет смысл распределения вероятностей значений процесса $\{k(\tau N)\}$ при $N \to \infty$, и определяется системой

$$R\{B(0)+\kappa_1 A(0)\} = 0 \tag{5}$$

и условием нормировки

$$RE = 1, \tag{6}$$

где E – единичный вектор, а функция $\kappa_1(\tau)$ определена обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\kappa_1'(\tau) = R(\kappa_1)\{B'(0)+\kappa_1 A'(0)\}E. \tag{7}$$

В силу замен (2) для безусловной характеристической функции $Me^{jui(t)}$ числа заявок в ИПВ можно записать приближенное равенство
$Me^{jui(t)} = H(u,t)E \approx \exp\{juN\kappa_1(t/N)\}$, которое будем называть асимптотикой первого порядка для допредельной модели. Из асимптотики первого порядка следует, что среднее значение числа заявок в ИПВ имеет вид

$$m(t) = N\kappa_1(t/N). \tag{8}$$

5. АСИМПТОТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (1) выполним замену $H(u,t) = \exp\{juN\kappa_1(t/N)\}H_2(u,t)$, получим

$$\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t} + \frac{j}{N}\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u}A(ju) = H_2(u,t)\Big\{B(ju)+$$

$$+\kappa_1(t/N)A(ju) - ju\kappa_1'(t/N)I + \frac{1}{N}C(ju)\Big\}, \tag{9}$$

в котором выполним замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad t\varepsilon^2 = \tau, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u,t) = F_2(w,\tau,\varepsilon). \tag{10}$$

Уравнение (9) примет вид

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon\frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w) = F_2(w,\tau,\varepsilon)\{B(j\varepsilon w)+$$

$$+\kappa_1(\tau)A(j\varepsilon w) - j\varepsilon w\kappa_1'(\tau)I + \varepsilon^2C(j\varepsilon w)\}. \tag{11}$$

Теорема 2. *Решение уравнения (11) имеет вид*

$$F_2(w,\tau) = R\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2(\tau)\right\}, \tag{12}$$

где вектор R определен выше системой (6-7) а функция $\kappa_2(\tau)$ определяется уравнением

$$\kappa_2'(\tau) - 2\kappa_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\kappa_1}\Big(R\{B'(0)+\kappa_1A'(0)\}\Big)E =$$

$$= \Big(R\{B''(0)+\kappa_1A''(0)\}\Big)E + 2\Delta_1\{B'(0)+\kappa_1A'(0)\}E, \tag{13}$$

где вектор Δ_1 определяется системой

$$\Delta_1\{B(0)+\kappa_1A(0)\} + R\{B'(0)+\kappa_1A'(0) - \kappa_1'(\tau)I\} = 0, \tag{14}$$

$$\Delta_1E = 0.$$

В силу замен (10) для безусловной характеристической функции $Me^{jui(t)}$, можно записать приближенное равенство $Me^{jui(t)} = H(u,t)E =$
$= \exp\{juN\kappa_1(t/N)\}H_2(u,t)E \approx \exp\left(juN\kappa_1(t/N) + \frac{(ju/\varepsilon)^2}{2}\kappa_2(t/N)\right)$, которое будем называть асимптотикой второго порядка.

6. АСИМПТОТИКА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Для нахождения асимптотики третьего порядка в уравнении (9) выполним замену $H_2(u,t) = \exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}N\kappa_2(t/N)\right\}H_3(u,t)$, получим

$$\frac{\partial H_3(u,t)}{\partial t} + \frac{j}{N}\frac{\partial H_3(u,t)}{\partial u}A(ju) = H_3(u,t)\Big\{B(ju) + \kappa_1(t/N)A(ju) - ju\kappa_1'(t/N)I +$$

$$+\frac{1}{N}C(ju) - \frac{(ju)^2}{2}\kappa_2'(t/N)I + ju\kappa_2(t/N)A(ju)\Big\}, \tag{15}$$

в которой выполним замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad t\varepsilon^3 = \tau, \quad u = \varepsilon w, \quad H_3(u,t) = F_3(w,\tau,\varepsilon). \tag{16}$$

Уравнение (15) примет вид

$$\varepsilon^3\frac{\partial F_3(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w) = F_3(w,\tau,\varepsilon)\Big\{B(j\varepsilon w) + \kappa_1(\tau)A(j\varepsilon w) -$$

$$-j\varepsilon w\kappa_1'(\tau)I + \varepsilon^3 C(j\varepsilon w) - \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\kappa_2'(\tau)I + j\varepsilon w\kappa_2(\tau)A(j\varepsilon w)\Big\}. \tag{17}$$

Теорема 3. *Решение уравнения (17) имеет вид*

$$F_3(w,\tau) = R\exp\left\{\frac{(jw)^3}{3!}\kappa_3(\tau)\right\}, \tag{18}$$

где вектор R определен выше системой (6-7) а функция $\kappa_3(\tau)$ определяется обыкновенным линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\kappa_3'(\tau) - 3\kappa_3(\tau)R\{B'(0) + \kappa_1 A'(0)\} = 3\Delta_2\{B'(0) + \kappa_1 A'(0)\} + 3\Delta_1\{B''(0) +$$
$$+\kappa_1 A''(0)\}E + R\{B'''(0) + \kappa_1 A'''(0)\}E + 3\kappa_2(\tau)\left(\frac{\partial R(\kappa_1)}{\partial \kappa_1}\{B''(0) +\right.$$
$$\left. +\kappa_1 A''(0)\}E + RA''(0)E + 2\kappa_2(\tau)\frac{\partial R(\kappa_1)}{\partial \kappa_1}A'(0)E + 2\Delta_1 A'(0)E\right),$$

тор Δ_1 *определен выше в (14), а вектор* Δ_2 *следует из системы*

$$(0) + \kappa_1 A(0)\} + 2\left(\kappa_2 \frac{\partial R(\kappa_1)}{\partial \kappa_1} + \Delta_1\right)\left\{\{B'(0) + \kappa_1 A'(0)\} - \kappa_1' I + \kappa_2 A(0)\right\} +$$
$$+R\{B''(0) + \kappa_1 A''(0)\} - \kappa_2' I + 2\kappa_2 A'(0)\Big\} = 0,$$

$$\Delta_2 E = 0.$$

:илу замен (16) для функции $H_3(u,t)$ имеет место равенство

$t) = R\exp\left\{\frac{(ju/\varepsilon)^3}{6}\kappa_3(t/N)\right\}$. Тогда для безусловной характеристической функ-

$1e^{jui(t)}$, можно записать $Me^{jui(t)} = H(u,t)E = \exp\{juN\kappa_1(t/N)\} \times \times H_2(u,t)E \approx$

$juN\kappa_1(t/N) + \frac{(ju/\varepsilon)^2}{2}\kappa_2(t/N) + \frac{(ju/\varepsilon)^3}{6}\kappa_3(t/N)\Big)$. Это равенство будем называть

птотикой третьего порядка.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ким образом, в работе были получены асимптотики первого, второго и третье- рядков, которые могут быть в дальнейшем использованы для более детального :дования системы и оптимизации ее параметров.

ЛИТЕРАТУРА

Іазаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ !004. -228 с.

Чазаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ 2006. -204 с.

Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ 2006. -112 с.