СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СЕТЕЙ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. Старовойтов

Белорусский государственный университет транспорта
Гомель, Беларусь
Astarovoytov@tut.by

Рассматриваются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с марковской маршрутизацией и симметричными дисциплинами обслуживания. Однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах. В каждом узле количество работы, необходимое для обслуживания поступающего требования и для переключения режима, имеет произвольное распределение. Скорость выполнения каждой из указанных работ зависит от остаточного количества работы. Для открытых сетей входной поток – простейший. Находится стационарное распределение кусочно-непрерывного процесса, описывающего поведение сети.

Ключевые слова: кусочно-непрерывный марковский процесс, инвариантность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов исследования немарковских сетей массового обслуживания является метод расширения фазового пространства (метод дополнительных переменных). Согласно этому методу процесс, описывающий поведение сети, дополняют такими компонентами, чтобы полученный процесс был марковским. В случае, когда количество работы, которую необходимо выполнить для обслуживания требования, имеет произвольное распределение, в качестве дополнительных переменных берут остаточные величины работ. В зависимости от вида этих дополнительных переменных выделяют кусочно-линейные и кусочно-непрерывные процессы [1]. А именно, процесс называют кусочно-линейным, если дополнительные переменные убывают по линейному закону, и кусочно-непрерывным в противном случае. Исходя из вида процесса, описывающего поведение сети, вводится классификация: кусочно-линейные и кусочно-непрерывные сети массового обслуживания.

В работах [2, 3] исследовались кусочно-линейные сети с многорежимными стратегиями обслуживания при различных дисциплинах обслуживания. В данной работе рассматриваются сети с многорежимными стратегиями обслуживания и произвольно распределенным количеством работы по обслуживанию требований и по переключению режимов работы приборов. При этом скорости выполнения указанных работ зависят от величин остаточных работ. Эта зависимость описывается некоторой непрерывной функцией. Таким образом, данную сеть можно классифицировать как кусочно-непрерывную.

Для описанного класса сетей находится стационарное распределение вероятностей состояний соответствующего кусочно-непрерывного процесса. Как следствие из этого результата находится стационарное распределение основного (немарковского) процесса и устанавливается его инвариантность.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов. В случае открытой сети поступающий в нее поток заявок – простейший с интенсивностью λ, а каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью π_{0l} направляется в l-й узел ($l = \overline{1,N}$; $\sum_{l=1}^{N} \pi_{0l} = 1$). В случае замкнутой сети в ней циркулирует M заявок. Заявка, обслуженная в l-м узле, мгновенно с вероятностью π_{lk} направляется в k-й узел, а с вероятностью π_{l0} в случае открытой сети покидает ее ($l, k = \overline{1,N}$; $\sum_{k=0}^{N} \pi_{lk} = 1$ для открытой и $\sum_{k=1}^{N} \pi_{lk} = 1$ для замкнутой сети). В l-м узле находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах. Состояние l-го узла характеризуется парой чисел $x_l = (i_l,\ j_l)$, где i_l – число заявок в l-м узле, j_l – номер режима, в котором работает прибор в l-м узле ($l = \overline{1,N}; j_l = \overline{0,r_l}$).

Количество работы, необходимое для изменения прибором l-го узла режима работы j_l (на $j_l - 1, j_l \neq 0$ или $j_l + 1, j_l \neq r_l$), является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(j_l, u)$ и плотностью распределения $f_l(j_l, u)$, $\Phi_l(j_l, 0) = 0$. Если в момент времени t состояние узла есть (i_l, j_l), а $\psi_{l,j_l}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t до перехода из режима j_l в соседний режим, то скорость выполнения указанной работы равна $(\nu_l(i_l, j_l)I_{(j_l\neq r_l)} + \varphi_l(i_l, j_l)I_{(j_l\neq 0)})\beta_l(j_l, \psi_{l,j_l}(t))$, то есть зависит от остаточного количества работы. При этом с вероятностью $\nu_l(i_l, j_l)I_{(j_l\neq r_l)}/\big(\nu_l(i_l, j_l)I_{(j_l\neq r_l)} + \varphi_l(i_l, j_l)I_{(j_l\neq 0)}\big)$ прибор l-го узла переходит в режим $j_l + 1$, $j_l \neq r_l$, а с вероятностью $\varphi_l(i_l, j_l)I_{(j_l\neq 0)}$ / $\big(\nu_l(i_l, j_l)I_{(j_l\neq r_l)} + \varphi_l(i_l, j_l)I_{(j_l\neq 0)}\big)$ – в режим $j_l - 1$, $j_l \neq 0$.

В дальнейшем будем полагать, что $\nu_l(i_l, j_l) > 0$, $\varphi_l(i_l, j_l) > 0$, $\beta_l(j_l, u) > 0$, $i_l \geq 0$, функции $\beta_l(j_l, u)$ являются непрерывными для любого $u \geq 0$ и выполнено следующее неравенство $\eta_l(j_l) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u f_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)} du < +\infty$, $\quad j_l = \overline{0,r_l}$, $l = \overline{1,N}$.

Если в момент времени t состояние l-го узла есть вектор (i_l, j_l) и сразу после указанного момента в этот узел поступает требование, то оно с вероятностью $\delta_l^n(i_l + 1, j_l)$ занимает n-ю позицию в очереди ($n = \overline{1; i_l + 1}$) и немедленно начинает обслуживаться, при этом заявки, занимающие позиции $n, n + 1, \ldots, i_l$, перемещаются на позиии $n + 1, n + 2, \ldots, i_l + 1$ ($\sum_{n=1}^{i_l+1} \delta_l^n(i_l + 1, j_l) = 1$).

Пусть $\xi_{l,k}(t)$ – количество работы, которую осталось выполнить с момента t до момента завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в l-м узле, $\xi_l(t) = (\xi_{l,1}(t), \xi_{l,2}(t), \ldots, \xi_{l,i_l(t)}(t))$ ($l = \overline{1,N}$). При поступлении требования в l-й узел количество работы по его обслуживанию есть случайная величина с функцией распределения $H_l(u)$ и плотностью распределения $h_l(u)$, $H_l(0) = 0$. Если в момент времени t состояние узла есть (i_l, j_l), то скорость выполнения работы по обслуживанию заявки, занимающей k-ую позицию, равна $\alpha_l(i_l, j_l)\gamma_l^k(i_l, j_l)\mu_l(\xi_{l,k}(t))$, где $\alpha_l(i_l, j_l) > 0$, $\mu_l(u) > 0$, $0 \le \gamma_l^k(i_l, j_l) \le 1$, $\sum_{k=1}^{i_l} \gamma_l^k(i_l, j_l) = 1$. Таким образом, и скорость выполнения работы по обслуживанию требований зависит от остаточного количества работы $\xi_{l,k}(t)$.

Относительно функций $\mu_l(u)$ также будем полагать, что они являются непрерывными для любого $u \ge 0$ и выполнено следующее неравенство $\tau_l = \int\limits_0^{+\infty} \frac{uh_l(u)}{\mu_l(u)} du < +\infty$, $l = \overline{1,N}$.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$, где $x_l(t) = (i_l(t), j_l(t))$ – состояние l-го узла в момент времени t. В соответствии с вышесказанным здесь $i_l(t)$ – число заявок в l-м узле в момент времени t, $j_l(t)$ – номер режима работы l-го узла в момент времени t. Тогда $x(t)$ обладает не более чем счетным фазовым пространством $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, где $X_l = \{(i_l, j_l) | \, i_l = 0, 1, \ldots; j_l = \overline{0, r_l}\}$, в случае открытой сети и $Y = \{x \in Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_N : i_1 + i_2 + \ldots + i_N = M\}$, где $Y_l = \{(i_l, j_l) | \, i_l \le M; j_l = \overline{0, r_l}\}$, в случае замкнутой сети.

В общем случае процесс $x(t)$ не будет марковским, поэтому рассмотрим процесс $\zeta(t) = (x(t), \xi(t), \psi(t))$, добавляя к $x(t)$ непрерывные компоненты $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_N(t))$, $\psi(t) = (\psi_{1,j_1}(t), \psi_{2,j_2}(t), \ldots, \psi_{N,j_N}(t))$, где $\xi_l(t)$ и $\psi_{l,j_l}(t)$ – определены выше. В рамках постановки задачи процесс $\zeta(t)$ будет являться кусочно-непрерывным марковским процессом.

Введем обозначения

$$F(x, y, z) = F(x, y_{11}, \ldots, y_{1,i_1}; \ldots; y_{N1}, \ldots, y_{N,i_N}; z_{1,j_1}, \ldots, z_{N,j_N}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{x(t) = x, \ \xi_{l1}(t) < y_{l1}, \ldots, \xi_{l,i_l}(t) < y_{l,i_l}, l = \overline{1,N};$$

$$\psi_{1,j_1}(t) < z_{1,j_1}, \ldots, \psi_{N,j_N}(t) < z_{N,j_N}\},$$

$$\overline{F}(x, y, z) = \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_N+N} F(x, y, z)}{\partial y_{11} \ldots \partial y_{N,i_N} \partial z_{1,j_1} \ldots \partial z_{N,j_N}}, \quad P(x) = \lim_{t\to\infty} P\{x(t) = x\}.$$

Цель работы – найти стационарные функции распределения $F(x, y, z)$, плотности распределения $\overline{F}(x, y, z)$ и стационарные вероятности состояний сети $P(x)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем предполагать, что матрица (π_{lk}), где $l, k = \overline{0, N}$ в случае открытой сети (π_{00}) и $l, k = \overline{1, N}$ в случае замкнутой сети, неприводима. Тогда в случае открытой сети уравнение трафика

$$\varepsilon_l = \pi_{0l} + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \pi_{kl}, \quad l = \overline{1,N}, \tag{1}$$

имеет единственное положительное решение (ε_l, $l=\overline{1,N}$). В случае замкнутой сети уравнение трафика

$$\varepsilon_l=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\pi_{kl},\quad l=\overline{1,N},\tag{2}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение (ε_l, $l=\overline{1,N}$).

Для открытой сети основной результат имеет вид

Теорема 1. *Пусть процесс $\zeta(t)$ эргодичен. Если выполнены соотношения*

$$\nu_l(i_l,j_l-1)\alpha_l(i_l,j_l)\varphi_l(i_l-1,j_l)=\nu_l(i_l-1,j_l-1)\alpha_l(i_l,j_l-1)\varphi_l(i_l,j_l),$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{h_l(u)}{\mu_l(u)}du=\frac{1}{\mu_l(0)},\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{f_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)}du=\frac{1}{\beta_l(j_l,0)},\ \delta_l^n(i_l,j_l)=\gamma_l^n(i_l,j_l),$$

$$i_l\ge 1,\quad 1\le j_l\le r_l,\quad 1\le n\le i_l,\quad 1\le l\le N,$$

то стационарные плотности $\overline{F}(x,y,z)$ и стационарные функции распределения $F(x,y,z)$ определяются по следующим формулам

$$\overline{F}(x,y,z)=P(0)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)\,\eta_l^{-1}(j_l)\int\limits_{z_{l,j_l}}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)}du\prod_{k=1}^{i_l}\tau_l^{-1}\int\limits_{y_{l,k}}^{+\infty}\frac{h_l(u)}{\mu_l(u)}du,$$

$$F(x,y,z)=P(0)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)\,\eta_l^{-1}(j_l)\left(z_{l,j_l}\int\limits_{z_{l,j_l}}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)}du+\int\limits_0^{z_{l,j_l}}\frac{uf_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)}du\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{i_l}\tau_l^{-1}\left(y_{l,k}\int\limits_{y_{l,k}}^{+\infty}\frac{h_l(u)}{\mu_l(u)}du+\int\limits_0^{y_{l,k}}\frac{uh_l(u)}{\mu_l(u)}du\right),\quad x\in X,\ \text{где}$$

$$p_l(x_l)=(\lambda\varepsilon_l)^{i_l}\frac{\eta_l(j_l)}{\eta_l(0)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(0,k-1)}{\varphi_l(0,k)}\prod_{s=1}^{i_l}\frac{\tau_l}{\alpha_l(s,j_l)},\tag{3}$$

ε_l находятся из (1), *а $P(0)$ находится из условия нормировки.*

В случае замкнутой сети справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть процесс $\zeta(t)$ эргодичен. Если выполнены следующие соотношения $\nu_l(i_l,j_l-1)\alpha_l(i_l,j_l)\varphi_l(i_l-1,j_l)=\nu_l(i_l-1,j_l-1)\alpha_l(i_l,j_l-1)\varphi_l(i_l,j_l)$,*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{h_l(u)}{\mu_l(u)}du=\frac{1}{\mu_l(0)},\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{f_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)}du=\frac{1}{\beta_l(j_l,0)},\ \delta_l^n(i_l,j_l)=\gamma_l^n(i_l,j_l),$$

$1\le i_l\le M,\quad 1\le j_l\le r_l,\quad 1\le n\le i_l,\quad 1\le l\le N$, *то стационарные плотности $\overline{F}(x,y,z)$ и стационарные функции распределения $F(x,y,z)$ определяются по* *следующим формулам*

$$\overline{F}(x,y,z)=C(N,M)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)\,\eta_l^{-1}(j_l)\int\limits_{z_{l,j_l}}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)}du\prod_{k=1}^{i_l}\tau_l^{-1}\int\limits_{y_{l,k}}^{+\infty}\frac{h_l(u)}{\mu_l(u)}du,$$

$$F(x,y,z)=C(N,M)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)\,\eta_l^{-1}(j_l)\left(z_{l,j_l}\int\limits_{z_{l,j_l}}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)}du+\int\limits_{0}^{z_{l,j_l}}\frac{uf_l(j_l,u)}{\beta_l(j_l,u)}du\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{i_l}\tau_l^{-1}\left(y_{l,k}\int\limits_{y_{l,k}}^{+\infty}\frac{h_l(u)}{\mu_l(u)}du+\int\limits_{0}^{y_{l,k}}\frac{uh_l(u)}{\mu_l(u)}du\right),\quad x\in Y,$$

где $p_l(x_l)=\frac{\eta_l(j_l)}{\eta_l(0)}\prod\limits_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(0,k-1)}{\varphi_l(0,k)}\prod\limits_{s=1}^{i_l}\frac{\varepsilon_l\tau_l}{\alpha_l(s,j_l)}$, ε_l *находятся из* (2), *а* $C(N,M)$ *находится из условия нормировки.*

Из теорем 1 и 2 с учетом равенства $P(x)=F(x,+\infty,+\infty)$ вытекают следующие утверждения

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 стационарное распределение вероятностей состояний* $\{P(x),\ x\in X\}$ *процесса* $x(t)$ *не зависит от вида функций распределения* $H_l(u)$, $\Phi_l(j_l,u)$ *и имеет вид* $P(x)=P(0)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)$, *где* $p_l(x_l)$ *определяются по формулам* (3), *а* $P(0)$ *находится из условия нормировки.*

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 стационарное распределение вероятностей состояний* $\{P(x),\ x\in Y\}$ *процесса* $x(t)$ *не зависит от вида функций распределения* $H_l(u)$, $\Phi_l(j_l,u)$ *и имеет вид* $P(x)=C(N,M)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)$, *где* $p_l(x_l)$ *определяются по формулам* (2), *а* $C(N,M)$ *находится из условия нормировки.*

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и произвольным распределением величин работ, требующихся для обслуживания заявок и для переключения режимов обслуживания, в случае, когда скорость выполнения указанных работ зависит от остаточных величин работ, устанавливается, что стационарное распределение вероятностей состояний процесса, описывающего поведение сети, имеет форму произведения, если дисциплина обслуживания является симметричной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивницкий В. А.* Теория сетей массового обслуживания. М.: Физматлит, 2004.
2. *Старовойтов А. Н.* Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания // Проблемы передачи информации. 2006. Т. 42. № 4. С. 121–128.
3. *Старовойтов А. Н.* Кусочно-линейные сети с многорежимными стратегиями обслуживания // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6. С. 107–116.