ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВ В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ФАЗ И ЛИНИЙ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

А. Назаров, О. Галажинская*, И. Ананина

Томский государственный университет

Томск, Россия

* oxanagala@yandex.ru

В системе массового обслуживания с неограниченным числом фаз и линий рассматривается трехмерный поток входящих и выходящих заявок, а также заявок, переходящих от предыдущей фазы обслуживания к следующей фазе. Предложен метод предельной декомпозиции анализа этого потока. Найдена совместная производящая функция трехмерного случайного процесса, определяющего число событий, наступивших в каждом потоке за определенное время.

Ключевые слова: система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, многофазная линия, многомерный поток, метод декомпозиции.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена система массового обслуживания с неограниченным числом фаз и линий обслуживания, для которой найдено совместное распределение вероятностей числа заявок, обслуживаемых на каждой фазе. Для полумарковского закона обслуживания показано, что компоненты бесконечномерного случайного вектора числа заявок на различных фазах стохастически независимы и распределены по законам Пуассона. В предлагаемой работе рассмотрена также система массового обслуживания, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Поступившая заявка занимает одну из свободных линий, последовательно выполняя обслуживания, начиняя от первой фазы. Линия считается занятой, если занята одна из ее фаз. Завершив обслуживания на k-ой фазе, заявка с вероятностью $1 - r_k$ покидает систему, а с противоположной вероятностью r_k переходит на следующую фазу для продолжения обслуживания. Продолжительности фаз обслуживания стохастически независимы и определяются функциями распределения $B_k(x)$ для каждой фазы. Процессы обслуживания для различных линий одинаковы и стохастически независимы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим случайные процессы, определяющие основные потоки для предложенной модели массового обслуживания:

$\nu(t)$ - число заявок входящего потока, поступивших в систему за время t,
$n(t)$ - число заявок, перешедших от предыдущей фазы обслуживания к следующей фазе за время t,
$m(t)$ - число заявок, завершивших обслуживание и покинувших систему за время t.
Ставится задача нахождения совместной производящей функции трехмерного случайного процесса $\{\nu(t), n(t), m(t)\}$

$$H(x,y,z,t) = M\left\{x^{\nu(t)}, y^{n(t)}, z^{m(t)}\right\}. \tag{1}$$

3. МЕТОД ПРЕДЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Для решения поставленной задачи определения совместной производящей функции (1) применим метод предельной декомпозиции, который заключается в следующем. По равномерной полиномиальной схеме разделим простейший входящий поток на N независимых пуассоновских потоков с одинаковыми параметрами λ/N. Рассмотрим однолинейную систему с неограниченным числом фаз, на вход которой поступает простейший с параметром λ/N поток заявок, а обслуживание реализуется по вышеописанной схеме, в которой заявка, застав линию свободной последовательно выполняет обслуживание, начиная от первой фазы. Завершив обслуживание на k-ой фазе, заявка с вероятностью $1 - r_k$ покидает систему, а с противоположной вероятностью r_k переходит на следующую фазу для продолжения обслуживания. Продолжительности фаз обслуживания стохастически независимы и определяются функциями распределения $B_k(x)$ для каждой фазы. Линия считается занятой, если занята какая-нибудь ее фаза обслуживания. Заявка, заставшая линию занятой, теряется, но при $N \to \infty$ вероятность потери заявки стремится к нулю, поэтому потерями заявок в предельной ситуации можно пренебречь. Выполнив исследование однолинейной системы и найдя для нее совместную производящую функцию

$$H(x,y,z,t,N) = M\left\{x^{\nu(t,N)}, y^{n(t,N)}, z^{m(t,N)}\right\}. \tag{2}$$

где $\{\nu(t,N), n(t,N), m(t,N)\}$ - соответствующий для предложенной однолинейной системы трехмерный случайный процесс. Совместная производящая функция (1) определяется функцией (2) равенством

$$H(x,y,z,t,N) = \lim_{N\to\infty} H^N(x,y,z,t,N). \tag{3}$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Для исследования однолинейной системы определим следующие случайные процессы:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если линия свободна,} \\ k, & \text{если занята } k\text{-ая фаза,} \end{cases}$$

если $k(t) > 0$, то определим процесс $u(t)$ как длину интервала от момента t до момента окончания времени пребывания на k-ой фазе. Так как пятимерный случайный процесс $\{k(t), \nu(t,N), n(t,N), m(t,N), u(t)\}$ марковский, то его распределение вероятностей

$$P\{k(t)=0, \nu(t,N)=\nu, n(t,N)=N, m(t,N)=m, \} = P_0(\nu,n,m,t,N),$$

$$P\{k(t)=k, \nu(t,N)=\nu, n(t,N)=N, m(t,N)=m, u(t)<u\} = P_1(\nu,n,m,u,t,N)$$

удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_0(\nu,n,m,t,N)}{\partial t} &= -\frac{\lambda}{N}P_0(\nu,n,m,t,N) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial P_k(\nu,n,m-1,0,t,N)}{\partial u}(1-r_k),\\
\frac{\partial P_1(\nu,n,m,u,t,N)}{\partial t} &= \frac{\partial P_1(\nu,n,m,u,t,N)}{\partial u} - \frac{\partial P_1(\nu,n,m,0,t,N)}{\partial u} +\\
&+P_0(\nu-1,n,m,t,N)\frac{\lambda}{N}B_1(u),\\
\frac{\partial P_k(\nu,n,m,u,t,N)}{\partial t} &= \frac{\partial P_k(\nu,n,m,u,t,N)}{\partial u} - \frac{\partial P_k(\nu,n,m,0,t,N)}{\partial u} +\\
&+\frac{\partial P_{k-1}(\nu,n-1,m,0,t,N)}{\partial u}r_{k-1}B_k(u).
\end{aligned} \tag{4}$$

Обозначив функции, аналогичные производящим

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu,n,m} x^\nu y^n z^m P_0(\nu,n,m,t,N) &= H_0(x,y,z,t,N),\\
\sum_{\nu,n,m} x^\nu y^n z^m P_k(\nu,n,m,u,t,N) &= H_k(x,y,z,u,t,N).
\end{aligned} \tag{5}$$

Для них из системы (4) получим следующую систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0(x,y,z,t,N)}{\partial t} &= -\frac{\lambda}{N}H_0(x,y,z,t,N) + z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial H_k(x,y,z,0,t,N)}{\partial u}(1-r_k),\\
\frac{\partial H_1(x,y,z,u,t,N)}{\partial t} &= \frac{\partial H_1(x,y,z,u,t,N)}{\partial u} - \frac{\partial H_1(x,y,z,0,t,N)}{\partial u} +\\
&+xH_0(x,y,z,t,N)\frac{\lambda}{N}B_1(u),\\
\frac{\partial H_k(x,y,z,u,t,N)}{\partial t} &= \frac{\partial H_k(x,y,z,u,t,N)}{\partial u} - \frac{\partial H_k(x,y,z,0,t,N)}{\partial u} +\\
&+y\frac{\partial H_{k-1}(x,y,z,0,t,N)}{\partial u}r_{k-1}B_k(u).
\end{aligned} \tag{6}$$

частное решение которой удовлетворяет начальному условию

$$H_0(x,y,z,0,N) \equiv 1, \quad H_k(x,y,z,u,0,N) \equiv 0 \tag{7}$$

Найдя решение задачи Коши (6–7), определим маргинальную производящую функцию

$$H(x,y,z,t,N) = H_0(x,y,z,t,N) + \lim_{u\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}H_k(x,y,z,u,t,N), \tag{8}$$

Подставляя которую в (3), найдем решение поставленной задачи. Решение задачи Коши (6-7) найдем в виде

$$
\begin{aligned}
H_0(x,y,z,t,N) &= 1+\frac{1}{N}F_0(x,y,z,t)+0(N^{-2}),\\
H_k(x,y,z,u,t,N) &= \frac{1}{N}F_k(x,y,z,u,t)+0(N^{-2}),
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $F_0(x,y,z,t)$ и $F_k(x,y,z,u,t)$ являются решением следующей задачи Коши:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_0(x,y,z,t)}{\partial t} &= -\lambda+z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial F_k(x,y,z,0,t)}{\partial u}(1-r_k),\\
\frac{\partial F_1(x,y,z,u,t)}{\partial t} &= \frac{\partial F_1(x,y,z,u,t)}{\partial u}-\frac{\partial F_1(x,y,z,0,t)}{\partial u}+x\lambda B_1(u),\\
\frac{\partial F_k(x,y,z,u,t,)}{\partial t} &= \frac{\partial F_k(x,y,z,u,t)}{\partial u}-\frac{\partial F_k(x,y,z,0,t)}{\partial u}+y\frac{\partial F_{k-1}(x,y,z,0,t)}{\partial u}r_{k-1}B_k(u),\\
F_0(x,y,z,u,0) &\equiv 0,\quad F_k(x,y,z,u,0)\equiv 0.
\end{aligned}
$$

Можно показать, что решение этой задачи имеет вид

$$
\begin{aligned}
F_0(x,y,z,t) &= -\lambda t+z\lambda x\sum_{k=1}^{\infty}(1-r_k)y^{k-1}\prod_{i=0}^{k-1}r_i\int_0^t B^{(k)}(\tau)\,d\tau,\\
F_1(x,y,z,u,t) &= \lambda x\int_0^t\{B_1(u+t-\tau)-B_1(\tau)\}\,d\tau,\\
F_k(x,y,z,u,t) &= \lambda xy^{k-1}\prod_{i=0}^{k-1}r_i\int_0^t\left\{B^{k-1}(\tau)B_k(u+t-\tau)-B^{(k)}(\tau)\right\}\,d\tau,
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $B^{(k)}(\tau)$ — k-кратная свертка функций распределения $B_i(\tau)$ при $i=\overline{1,k}$.
В частности, при $u\to\infty$, получим

$$
\begin{aligned}
F_1(x,y,z,\infty,t) &= \lambda x\int_0^t\{1-B_1(\tau)\}\,d\tau,\\
F_k(x,y,z,\infty,t) &= \lambda xy^{k-1}\prod_{i=0}^{k-1}r_i\int_0^t\left\{B^{k-1}(\tau)-B^{(k)}(\tau)\right\}\,d\tau.
\end{aligned} \tag{11}
$$

5. СОВМЕСТНАЯ ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ЧИСЛА СОБЫТИЙ, НАСТУПИВШИХ В МНОГОМЕРНОМ ПОТОКЕ

Обозначив

$$
F(x,y,z,t)=F_0(x,y,z,t)+\sum_{k=1}^{\infty}F_k(x,y,z,\infty,t)
$$

из равенств (10) и (11) получим

$$
F(x,y,z,t)=(x-1)\lambda t+\lambda x\sum_{k=1}^{\infty}\{z-1+(y-z)r_k\}\,y^{k-1}\prod_{i=0}^{k-1}r_i\int_0^t B^{(k)}(\tau)\,d\tau. \tag{12}
$$

В силу равенств (8-9) можно записать

$$H(x,y,z,t,N) = 1 + \frac{1}{N}F(x,y,z,t) + 0(N^{-2}).$$

Подставляя это разложение функции $H(x,y,z,t,N)$ в равенство (3), получим, что совместная производящая функция $H(x,y,z,t)$ трехмерного случайного процесса $\{\nu(t)\,,n(t)\,,$ имеет вид

$$H(x,y,z,t) = exp\{F(x,y,z,t)\} =$$

$$= exp\left\{(x-1)\lambda t + \lambda x\sum_{k=1}^{\infty}[z-1+(y-z)r_k]\,y^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}r_i\int_0^t B^{(k)}(\tau)\,d\tau\right\}. \qquad (13)$$

Из вида (13) очевидно следует, что входящий и выходящий потоки, определяемые процессами $\nu(t)$ и $m(t)$, пуассоновские, при этом входящий поток стационарный с параметром λ, а выходящий, в силу начального условия (7) отличного от финального, нестационарный.

Поток смен фаз, определяемый процессом $n(t)$ нестационарный и непуассоновский с маргинальной производящей функцией $H_2(y,t)$ вида

$$H_2(y,t) = M\left\{e^{n(t)}\right\} = H(1,y,1,t) = exp\left\{\lambda(y-1)\sum_{k=1}^{\infty}y^{k-1}\prod_{i=0}^{k}r_i\int_0^t B^{(k)}(\tau)\,d\tau\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А., Галажинская О. Н.* Анализ систем с неограниченным числом фаз и линий и полумарковским процессом обслуживания //Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: сб. науч. ст. Междунар. науч. конф., Минск, 2008. – С. 234–238.