

# ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ВМАР/РН/с С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

**В. Мушко**

*Белорусский государственный университет*

*Минск, Беларусь*

*vmushko@tut.by*

Приведены результаты численных экспериментов для многолинейной системы массового обслуживания (СМО) с групповым марковским входным потоком, фазовым обслуживанием и повторными вызовами, исследованной с использованием альтернативного метода построения процесса, описывающего изменение состояний системы, состоящего в отслеживании числа приборов, занятых на каждой фазе обслуживания, вместо учета фазы, на которой находится каждый занятый прибор.

*Ключевые слова:* многолинейная система, групповой марковский входной поток, фазовое обслуживание, повторные вызовы.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается многолинейная система, в которой время обслуживания вызова на каждом приборе имеет распределение фазового типа (Phase-type, РН-type, [1]). Поток вызовов, входящий в систему, является групповым марковским входным потоком (Batch Markovian Arrival Process, ВМАР, [2]). Если в момент прибытия группы первичных вызовов в системе имеются свободные обслуживающие приборы, то первичные вызовы занимают их. Вызовы, для которых не нашлось свободных обслуживающих приборов, направляются в некоторую виртуальную динамическую область, называемую орбитой, и пытаются получить обслуживание позже. Каждый вызов, находящийся на орбите, совершает повторные попытки попасть на обслуживание через интервалы времени, имеющие экспоненциально распределенную длину, независимо от других вызовов. Если в момент повтора имеется один или несколько свободных приборов, то вызов занимает один из них и покидает систему после обслуживания. Если в момент повтора все приборы заняты, то повторный вызов возвращается на орбиту. Вызовы с орбиты являются абсолютно настойчивыми.

В работах [3, 4] для исследования этой системы вводится многомерный процесс  $\zeta_t = \{i_t, n_t, \nu_t, \eta_t^{(1)}, \dots, \eta_t^{(s)}\}$ ,  $t \geq 0$ , где  $\eta_t^{(l)}$  – номер фазы обслуживания, на которой находится  $l$ -й прибор в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ ,  $l = \overline{0, s}$ . Положительной осо-

бенностью подхода, используемого в [3, 4], является относительная простота аналитических результатов. Основным недостатком – необходимость работы с матрицами большой размерности. Так, размерность матриц, участвующих в вычислениях векторов стационарных вероятностей, равна  $J_1 = \bar{W} \frac{1 - M^{c+1}}{1 - M}$ . Например, для  $c = 15$ ,  $M = 2$ ,  $\bar{W} = 2$  имеем  $J_1 = 131070$ . Расчеты с матрицами таких размерностей практически невозможны на персональных компьютерах.

В работе [5] применен альтернативный метод исследования многолинейной системы с фазовым обслуживанием и повторными вызовами, предложенный в [6, 7]. В соответствии с этим методом вместо "наблюдения" за номером фазы каждого занятого прибора "отслеживается" число приборов, занятых на каждой фазе обслуживания. Метод из [6, 7] позволяет значительно сократить размерность  $J_1$ . Для тех же параметров системы размерность матриц равна 272 и вычисляется следующим образом:  $J_2 = \bar{W} \binom{c+M}{M}$ .

Примеры многолинейных систем с фазовым типом обслуживания, исследованные с применением этих методов, можно найти в работах [8, 9, 10].

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

С использованием инфраструктуры пакета прикладных программ "SIRIUS++" [11] была разработана программа, реализующая алгоритм вычисления стационарного распределения вероятностей и стационарных характеристик функционирования системы. Для иллюстрации работы программы приведем результаты двух численных экспериментов.

### Эксперимент 1.

Пусть число приборов  $c$  равно 9. Индивидуальная интенсивность  $\alpha$  повторных вызовов равна 111.

Кривая  $M$  на рисунках 1 – 2 соответствует модели СМО, когда в систему поступает стационарный пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda = 11.126$ .

Кривая  $M_x$  соответствует модели СМО, когда в систему поступает групповой стационарный пуассоновский поток, который определяется параметрами

$$D_0 = -5, D = 5, D_k = Dq^{k-1}(1 - q)/(1 - q^{k*}), k = \overline{1, k^*}, q = 0.8, k^* = 4.$$

Средняя интенсивность  $\lambda$  поступления вызовов равна 11.126. Средняя интенсивность  $\lambda_b$  поступления группы вызовов равна 5.

Кривая  $BMAP$  соответствует модели СМО, когда в систему поступает групповой марковский входной поток, который определяется параметрами

$$D_0 = \begin{bmatrix} -13.33652 & 0.58866 & 0.61739 \\ 0.69276 & -2.4469 & 0.423 \\ 0.68235 & 0.41443 & -1.63565 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 11.548588 & 0.363178 & 0.218704 \\ 0.3843 & 0.865978 & 0.080862 \\ 0.285213 & 0.04255 & 0.211111 \end{bmatrix},$$

$$D_k = Dq^{k-1}(1 - q)/(1 - q^{k*}), k = \overline{1, k^*}, q = 0.8, k^* = 4.$$

Средняя интенсивность  $\lambda$  поступления вызовов равна 11.126. Средняя интенсивность  $\lambda_b$  поступления группы вызовов равна 5. Квадрат коэффициента вариации  $c_{var}$  интервала времени между поступлениями соседних групп вызовов равен 4. Коэффициент корреляции  $c_{cor}$  двух последовательных интервалов времени между прибытиями соседних групп вызовов равен 0.1.

Время обслуживания вызова на каждом приборе имеет распределение фазового типа, которое характеризуется неприводимым представлением  $(\beta, S)$ , где

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -24.724898 & 24.724898 \\ 0 & -24.724898 \end{pmatrix}.$$

Средняя интенсивность  $\mu$  обслуживания равна 12.362.

Рисунки 1 – 2 представляют зависимость среднего числа  $L_0$  вызовов на орбите и вероятности  $P_{hit}$  того, что произвольный вызов немедленно получит обслуживание после прибытия, от средней интенсивности поступления группы вызовов, коэффициента корреляции двух последовательных интервалов времени между прибытиями соседних групп вызовов и загрузки системы  $\rho$ , принимающей значения из множества  $\{0.1, 0.2, \dots, 0.8\}$ . Загрузка системы варьируется за счет изменения параметра  $S$ .

Очевидно, что средняя интенсивность поступления группы вызовов и коэффициент корреляции существенным образом влияют на характеристики системы. А предположение о том, что входной поток является стационарным пуассоновским, влечет за собой слишком оптимистичные прогнозы относительно значений вероятностно-временных характеристик системы.

#### Эксперимент 2.

Целью данного эксперимента является сравнение времени работы программы, реализующей алгоритм вычисления стационарных характеристик системы, изложенный в [3, 4], и реализации того же алгоритма, предложенного в [5].

Численные результаты, приведенные ниже, были получены на ПЭВМ AMD Athlon™ 64 3700+, 2.21 ГГц, 2 ГБ ОЗУ, работающей под управлением ОС Microsoft Windows XP.

Пусть  $BMAP$ -поток определяется матрицами следующего вида:

$$D_0 = \begin{bmatrix} -7 & 0.000006 \\ 0.000005 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6.8909925 & 0.1090015 \\ 0.2289013 & 0.0710937 \end{bmatrix},$$

$$D_k = Dq^{k-1}(1 - q)/(1 - q^{k*}), \quad k = \overline{1, k*}, \quad q = 0.8, \quad k* = 3.$$

Средняя интенсивность  $\lambda$  поступления вызовов равна 8.963. Средняя интенсивность  $\lambda_b$  поступления группы вызовов равна 4.839. Квадрат коэффициента вариации  $c_{var}$  интервала времени между поступлениями соседних групп вызовов равен 10.343. Коэффициент корреляции  $c_{cor}$  двух последовательных интервалов времени между прибытиями соседних групп вызовов равен 0.1.

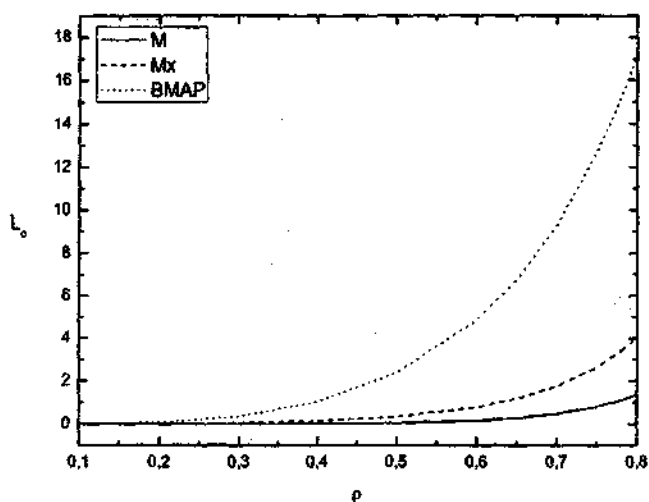


Рис. 1. Зависимость среднего числа  $L_0$  вызовов на орбите от загрузки системы  $\rho$

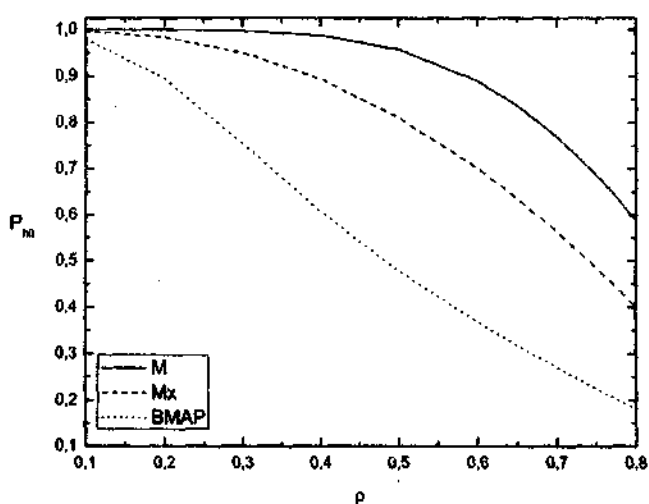


Рис. 2. Зависимость вероятности  $P_{\text{нл}}$  того, что произвольный вызов немедленно получит обслуживание после прибытия, от загрузки системы  $\rho$

Индивидуальная интенсивность  $\alpha$  повторных вызовов равна 90.

Время обслуживания вызова на каждом приборе имеет распределение фазового типа, которое характеризуется неприводимым представлением  $(\beta, S)$ , где

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -1.9918642 & 1.9918642 \\ 0 & -1.9918642 \end{pmatrix}.$$

Средняя интенсивность  $\mu$  обслуживания равна 0.996.

Число  $c$  приборов принимает значения из множества  $\{1, 2, \dots, 21\}$ . Загрузка системы остается постоянной (равной 0.3) за счет изменения параметра  $S$ .

Для расчета характеристик системы из [3, 4] при  $c = 7$  понадобилось 32 часа 17 минут. В то время как для системы из [5], время счета составило всего 3 минуты (см. Таблицу 1). Таким образом, метод из [6, 7] дает возможность проводить анализ систем с большим числом приборов.

Таблица 1 Сравнение времени работы программ

| $c$ | $J_2$ | Time      | $J_1$ | Time      |
|-----|-------|-----------|-------|-----------|
| 1   | 6     | 0h0m0s    | 6     | 0h0m0s    |
| 2   | 12    | 0h0m1s    | 14    | 0h0m2s    |
| 3   | 20    | 0h0m5s    | 30    | 0h0m14s   |
| 4   | 30    | 0h0m13s   | 62    | 0h2m9s    |
| 5   | 42    | 0h0m37s   | 126   | 0h19m13s  |
| 6   | 56    | 0h1m22s   | 254   | 2h46m52s  |
| 7   | 72    | 0h2m52s   | 510   | 32h16m26s |
| 8   | 90    | 0h5m35s   |       |           |
| 9   | 110   | 0h10m17s  |       |           |
| 10  | 132   | 0h17m48s  |       |           |
| 11  | 156   | 0h29m13s  |       |           |
| 12  | 182   | 0h48m15s  |       |           |
| 13  | 210   | 1h17m51s  |       |           |
| 14  | 240   | 1h45m47s  |       |           |
| 15  | 272   | 2h43m33s  |       |           |
| 16  | 306   | 3h52m45s  |       |           |
| 17  | 342   | 5h21m16s  |       |           |
| 18  | 380   | 8h45m59s  |       |           |
| 19  | 420   | 12h26m18s |       |           |
| 20  | 462   | 16h35m1s  |       |           |
| 21  | 506   | 21h58m24s |       |           |

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены результаты численных экспериментов для многолинейной системы с фазовым типом обслуживания и повторными вызовами, исследованной с применением альтернативного метода построения процесса, описывающего изменение состояний системы. Использование данного метода позволяет значительно сократить размерность матриц, участвующих в вычислениях векторов стационарных вероятностей, тем самым решая в некоторой степени проблему, связанную с переполнением

памяти ПЭВМ, не ориентированных на проведение значительных вычислительных работ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Neuts M. Matrix-geometric solutions in stochastic models. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981.
2. Lucantoni D. M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics-Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
3. Breuer L., Dudin A. N., Klimenok V. I. A retrial  $BMAP/PH/N$  system // Queueing Systems. 2002. V. 40. P. 433–457.
4. Breuer L., Klimenok V. I., Birukov A. A., Dudin A. N., Krieger U. Modeling the access to a wireless network at hot spots // European Transactions on Telecommunications. 2005. V. 16. P. 309–316.
5. Мушко В. В. Многолинейная система с фазовым типом обслуживания и повторными вызовами // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: сб. науч. ст. Междунар. науч. конф., Минск, 15–17 сент. 2008 г. / редкол.: Н.Н. Труш (отв. ред.) [и др.]. – Минск: Изд. центр БГУ, 2008. С. 226–233.
6. Ramaswami V. Independent Markov process in parallel // Communications in Statistics-Stochastic Models. 1985. V. 1. № 3. P. 419–432.
7. Ramaswami V., Lucantoni D. M. Algorithm for the multi-server queue with phase-type service // Communications in Statistics-Stochastic Models. 1985. V. 1. № 3. P. 393–417.
8. Krieger U. R., Wagner D. Analysis and application of an  $MMPP/PH/n/m$  multi-server model // Performance of Distributed Systems and Integrated Communication Networks / Eds. T. Hasegawa, H. Takagi and Y. Takahashi. North-Holland: Elsevier Science Publisher B.V., 1992. – P. 323–342.
9. Орловский Д. С. Система обслуживания  $BMAP/PH/N/0$  с рандомизированной стратегией принятия заявок // Труды 60-й научной сессии, посвященной Дню радио: В 2 т. (Москва 17–19 мая 2005 г.) / РНТОРЭС им. А.С. Попова. М., 2005. Т. 2. – С. 310–312.
10. Mushko V. V. Efficient implementation of algorithm for calculating the stationary distribution for  $M/PH/c$  system with addressed strategy of retrials // Proc. of 13-th Int. Conf. on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications (Bonn 28–31 May 2006) / Ed. Al-Begain K. Bonn, 2006. – P. 124–129.
11. Dudin A. N., Klimenok V. I., Tsarenkov G. V. Software "SIRIUS++" for performance evaluations of modern communication networks // Modelling and Simulation 2002: Proc. of the 16-th European Simulation Multiconference (Darmstadt 3–5 June 2002) / Eds. K. Amborski and H. Meuth. Netherlands: SCS, 2002. – P. 489–493.