ПРИМЕНЕНИЕ НМ-СЕТИ С ДВУМЯ ТИПАМИ ЗАЯВОК ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕЖБАНКОВСКИХ ПЛАТЕЖЕЙ

М. Маталыцкий[1], А. Карпук[2], Е. Колузаева[1,*]

[1] *Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,*
[2] *Расчетный центр Национального банка РБ*
[1] *Гродно, Беларусь*
[2] *Минск, Беларусь*
* koluzaeva@gmail.com

В статье проводится исследование и рассматриваются задачи оптимизации для НМ(Howard – Matalytski)-сети с двумя типами заявок, которая является стохастической моделью срочных и несрочных межбанковских платежей.

Ключевые слова: НМ-сеть, межбанковские платежи.

1. АНАЛИЗ НМ-СЕТИ ТИПА ДЖЕКСОНА С ДВУМЯ ТИПАМИ ЗАЯВОК

Рассмотрим НМ-сеть типа Джексона (см. [1]), состоящую из n систем обслуживания (СМО) $S_1, S_2, ..., S_n$, в которых обслуживаются заявки двух типов. СМО S_i является системой с двумя очередями и m_{ic} линиями обслуживания для заявок типа c, $c = 1, 2$, в которых отдельно обслуживаются заявки 1-го и 2-го типов, т.е. функционирование СМО S_i можно рассматривать как параллельное функционирование двух отдельных подсистем S_{i1} и S_{i2}, $i = \overline{1, n}$, рис.1. Под состоянием сети будем понимать вектор

$$k(t) = (k, t) = (k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}, ..., k_{n1}, k_{n2}, t),$$

где k_{ic} – число заявок типа c в подсистеме S_{ic} в момент времени t, $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$.

Пусть λ_{ic} – интенсивность поступления заявок типа c извне в подсистему S_{ic}, $\mu_{ic}(k_{ic})$ – интенсивность обслуживания заявок типа c в каждой из m_{ic} линий подсистемы S_{ic}, $p_{i0}^{(c)}$ – вероятность ухода заявок типа c из сети после обслуживания в системе S_i, $p_{ij}^{(c)}$– вероятность перехода заявки типа c из системы S_i в систему S_j, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij}^{(c)} = 1$, $i = \overline{1, n}$, c=1, 2. Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней СМО некоторый случайный доход и соответственно доход первой СМО уменьшается на эту величину.

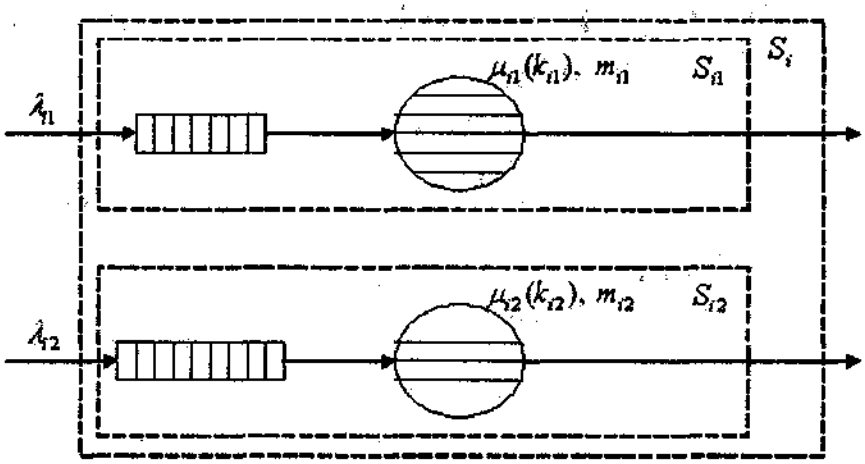

Рис. 1. Система S_i сети.

Обозначим через $V_i(t)$ доход системы S_i в момент времени t. Пусть $V_i(0) = v_{i0}$, найдем доход $V_i(t)$ в момент времени t. Разобьем отрезок $[0, t]$ на m частей длиной $\Delta t = \frac{t}{m}$, считая m большим. Выпишем вероятности событий, которые могут произойти на l-ом отрезке времени, $l = \overline{1, m}$. При этом возможны следующие ситуации.

1). С вероятностью $\lambda_{ic}\Delta t + o(\Delta t)$ в подсистему S_{ic} поступит заявка из внешней среды, которая принесет ей доход в размере $r_{0i}^{(c)}$, где $r_{0i}^{(c)}$ – случайная величина (СВ), с математическим ожиданием $M\{r_{0i}^{(c)}\} = a_{0i}^{(c)}$.

2). С вероятностью $\mu_{ic}\,(k_{ic}(l))\, u\,(k_{ic}(l))\, p_{i0}^{(c)}\Delta t + o(\Delta t)$ из системы S_i заявка типа c поступит во внешнюю среду, при этом ее доход уменьшится на величину $R_{i0}^{(c)} + R_i^{(c)}$, где $R_{i0}^{(c)}$ – СВ с $M\{R_{i0}^{(c)}\} = b_{i0}^{(c)}$, $R_i^{(c)}$ – СВ с $M\{R_i^{(c)}\} = b_i^{(c)}$, $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

3). С вероятностью $\mu_{jc}\left(k_{jc}(l)\right) u\left(k_{jc}(l)\right) p_{ji}^{(c)}\Delta t + o(\Delta t)$ заявка типа c перейдет из подсистемы S_{jc} в подсистему S_{ic} при этом доход системы S_i возрастет на величину $r_{ji}^{(c)}$, а доход системы S_j уменьшится на эту величину, $j = \overline{1, n}$, $j \neq i$, $r_{ji}^{(c)}$ – СВ, $M\{r_{ji}^{(c)}\} = a_{ji}^{(c)}$.

4). С вероятностью $\mu_{ic}\,(k_{ic}(l))\, u\,(k_{ic}(l))\, p_{ij}^{(c)}\Delta t + o(\Delta t)$ заявка типа c из подсистемы S_{ic} перейдет в подсистему S_{jc}, при этом доход СМО S_i уменьшится на величину $R_{ij}^{(c)} + R_i^{(c)}$, а доход системы S_j возрастет на величину $R_{ij}^{(c)}$, $R_{ij}^{(c)}$ – СВ с $M\{R_{ij}^{(c)}\} = b_{ij}^{(c)}$.

5). С вероятностью $1 - (\lambda_{ic} + \mu_{ic}\,(k_{ic}(l))\, u\,(k_{ic}(l)))\,\Delta t + o(\Delta t)$ на отрезке времени Δt изменение состояния подсистемы S_{ic} не произойдет, $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$.

Кроме того, за каждый малый промежуток времени Δt подсистема S_{ic} увеличивает свой доход на величину $r_i^{(c)}\Delta t$ за счет процентов на денежные средства, находящиеся в ней, где $r_i^{(c)}$ – СВ с $M\{r_i^{(c)}\} = c_i^{(c)}$, $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$.

Очевидно, что $r_{ji}^{(c)} = R_{ji}^{(c)}$ с вероятностью 1, т.е.

$$a_{ji}^{(c)} = b_{ji}^{(c)},\ i, j = \overline{1, n}, c = 1, 2. \qquad (1)$$

Пусть $d_{il}^{(c)}(\Delta t)$ – изменение дохода подсистемы S_{ic} на l-ом отрезке времени. Тогда из вышеуказанного следует

$$d_{il}^{(c)}(\Delta t) = \begin{cases} r_{0i}^{(c)} + r_i^{(c)}(\Delta t) \text{ с вероятностью } \lambda_{ic}\Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{i0}^{(c)} - R_i^{(c)} + r_i^{(c)}(\Delta t) \text{ с вероятностью } \mu_{ic}\left(k_{ic}(l)\right) u\left(k_{ic}(l)\right) p_{i0}^{(c)}\Delta t + o(\Delta t), \\ r_{ji}^{(c)} + r_i^{(c)}(\Delta t) \text{ с вероятностью } \mu_{jc}\left(k_{jc}(l)\right) u\left(k_{jc}(l)\right) p_{ji}^{(c)}\Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{ij}^{(c)} - R_i^{(c)} + r_i^{(c)}(\Delta t) \text{ с вероятностью } \mu_{ic}\left(k_{ic}(l)\right) u\left(k_{ic}(l)\right) p_{ij}^{(c)}\Delta t + o(\Delta t), \\ r_i^{(c)}(\Delta t) \text{ с вероятностью } 1 - \left(\lambda_{ic} + \mu_{ic}\left(k_{ic}(l)\right) u\left(k_{ic}(l)\right)\right)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

$j \neq i$, $i, j = \overline{1, n}$. Общий доход системы S_i равен

$$V_i(t) = v_{i0} + \sum_{i=2}^{2}\sum_{l=1}^{m} d_{il}^{(c)}(\Delta t) = v_{i0} + \sum_{i=1}^{2} V_{ic}(\Delta t),$$

где $V_{ic} = \sum\limits_{l=1}^{m} d_{il}^{(c)}(\Delta t)$ – доход подсистемы S_{ic} системы S_i, $c = 1, 2$.

Пусть интенсивности обслуживания заявок в линиях линейно зависят от их числа:

$$\mu_{ic}\left(k_{ic}(l)\right) u\left(k_{ic}(l)\right) = \begin{cases} \mu_{ic}k_{ic}(l), & k_{ic}(l) \leq m_{ic} \\ \mu_{ic}m_{ic}, & k_{ic}(l) > m_{ic} \end{cases} = \mu_{ic}\min\left(k_{ic}(l), m_{ic}\right),$$
$$i = \overline{1, n},\ c = 1, 2.$$

Используя технику, описанную в [2], можно получить выражения для ожидаемых (средних) доходов $v_{ic}(t) = M\left\{V_{ic}(t)\right\}$:

$$v_{ic}(t) = \left(c_i^{(c)} + \lambda_{ic}a_{0i}^{(c)}\right) t + \sum_{j=1}^{n} \mu_{jc}a_{ji}^{(c)}p_{jc}a_{ji}^{(c)} \int_0^t \min\left(N_{jc}(s), m_{jc}\right) ds -$$
$$-\mu_{ic}\int_0^t \min\left(N_{ic}(s), m_{ic}\right) ds \sum_{j=0}^{n}\left(b_{ij}^{(c)} + b_i^{(c)}\right) p_{ij}^{(c)},\ i = \overline{1, n}, c = 1, 2,$$

где $N_{ic}(s)$ – среднее число заявок типа c в подсистеме S_{ic} системы S_i. Величины $N_{ic}(s)$, $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$, могут быть найдены с помощью метода, рекуррентного по моментам времени [3]. Тогда ожидаемый доход системы S_i равен

$$v_i(t) = M\{V_i(t)\} = v_{i0} + \sum_{c=1}^{2} v_{ic}(t) = v_{i0} + \sum_{c=1}^{2}\left[\left(c_i^{(c)} + \lambda_{ic}a_{0i}^{(c)}\right) t + \sum_{j=1}^{n}\mu_{jc}a_{ji}^{(c)}p_{ji}\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^t \min\left(N_{jc}(s), m_{jc}\right) ds - \mu_{ic}\int_0^t \min\left(N_{ic}(s), m_{ic}\right) ds \sum_{j=0}^{n}\left(b_{ij}^{(c)} + b_i^{(c)}\right) p_{ij}^{(c)}\right],\ i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Рассмотрим частный случай, когда $m_{ic} = 1$, и пусть подсистемы S_{ic} функционируют в условиях высокой нагрузки, т.е. $\forall t\ k_{ic}(t) > 0$, $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$; во второй части статьи мы будем рассматривать именно такой режим функционирования. В этом случае $\min(N_{ic}(s), 1) = 1$ и, как следует из (1), $v_i(t) = v_{i0} + g_i t$, где $g_i = \sum_{c=1}^{2}\left(c_i^{(c)} + \lambda_{ic}a_{0i}^{(c)} - \mu_{ic}b_i^{(c)} + \sum_{j=1}^{n}\mu_{jc}a_{ji}^{(c)}p_{ji}^{(c)} - \mu_{ic}\sum_{j=0}^{n}b_{ij}^{(c)}p_{ij}^{(c)}\right)$. Отсюда следует, что если $g_i \geq 0$, то для того, чтобы

$$v_i(t) \geq 0, \tag{3}$$

нам достатачно взять $v_{i0} = v_{i0}^* = 0$; если же $g_i < 0$, то для того, чтобы выполнялось неравенство (2) на отрезке времени $[0, T]$, мы должны положить $v_{i0} = v_{i0}^* = |g_i|T$.

Важной практической задачей является следующая. Разобьем интервал $[0, T]$ точками $t_k : 0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T$. Предположим, что если мы меняем значение v_{i0} в момент времени t_k, то мы платим плату $q_i(t_k)$, т.е. доход системы S_i уменьшается на эту величину. Предположим также, что на интервалах времени $[0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $\ldots$, $[t_{k-1}, t_k)$, $\ldots$, $[t_{m-1}, T)$ меняются также параметры нашей сети λ_{ic}, μ_{ic}, $p_{ij}^{(c)}$ и мы получаем последовательность $g_i^{(1)}$, $g_i^{(2)}$, $\ldots$, $g_i^{(m)}$. Задача состоит в следующем $(t_0 = 0, t_m = T)$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[|g_i^{(k)}|\,(t_k - t_{k-1})^2 + q_i(t_k)\right] \to \min_{n, t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}}. \tag{4}$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ СЕТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕЖБАНКОВСКИХ ПЛАТЕЖЕЙ

Данная НМ-сеть может служить моделью межбанковских платежей. Как известно, все межбанковские платежи (платежи между различными банками) проводятся Расчетным центром (РЦ) Национального (Центрального) банка с помощью банковской компьютерной сети через корреспондентские счета, открывающиеся на балансе каждого банка. В настоящее время за один день проводится $2 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5$ межбанковских платежей. Каждый платеж оформляется в виде одного электронного платежного документа (ЭПД). Платежи бывают срочные и несрочные, соответственно ЭПД также делятся на срочные и несрочные. За срочность платежа банк берет деньги с клиента, а как проводить платеж – определяет сам клиент. Срочные платежи проводятся в режиме реального времени, т.е. проводится корректировка корреспондентских счетов банков сразу при обработке срочного ЭПД. Вычислительное оборудование РЦ и система передачи ЭПД в настоящее время способны обработать до 10^6 платежей в день. Количество срочных и несрочных платежей, которые приносят в каждый банк клиенты, а также суммы этих платежей, являются случайными величинами. За обработку каждого срочного и несрочного ЭПД РЦ получает от банка-плательщика определенную сумму.

На проведение срочных и несрочных платежей каждый банк в начале дня устанавливает денежные резервы. При проведении срочных платежей резервы уменьшаются на проведенную сумму. При проведении клиринговых расчетов деньги берутся из резерва банка, если суммы всех входящих несрочных платежей не хватает для проведения всех исходящих платежей. Каждый банк в течение дня видит состояния очередей своих срочных и несрочных платежей, состояние резервов, и может увеличить или уменьшить резервы или отозвать платеж, для проведения которого нет денег. Кроме того, каждый банк в любой момент времени может запросить и получить сведения (справку) из РЦ об ожидаемых поступлениях, т.е. о сумме всех срочных платежей других банков на этот банк, не проведенных по причине недостатка резервов у банков-плательщиков, и о сумме всех несрочных платежей других банков в этот банк, ожидающих начала очередного клирингового сеанса. За изменение величины каждого из резервов и за выдачу справки об ожидаемых поступлениях РЦ также берет определенную сумму.

В нашем случае система S_i соответствует i-му банку, который также обозначим S_i, посистема S_{i1} – это система обработки срочных платежей и срочных ЭПД банка S_i, подсистема S_{i2} – система обработки несрочных платежей и несрочных ЭПД банка S_i, $i = \overline{1,n}$. Заявкам 1-го типа соответствуют срочные платежи клиентов и срочные ЭПД, а заявкам 2-го типа – несрочные платежи и несрочные ЭПД. Опишем также, что означают другие параметры сети:

v_{i0} – резерв банка S_i, $i = \overline{1,n}$;

λ_{i1}, λ_{i2} –соответственно интенсивность срочных и несрочных платежей в банке S_i;

m_{i1}, m_{i2} – число сотрудников банка S_i, занимающихся обработкой соответственно срочных платежей (ЭПД) и несрочных платежей (ЭПД);

μ_{i1}, μ_{i2} – соответственно интенсивность обработки срочных платежей (ЭПД) и несрочных платежей (ЭПД) каждым сотрудником банка S_i, который этим занимается, $i = \overline{1,n}$;

$p_{ij}^{(1)}$, $p_{ij}^{(2)}$ – соответственно вероятности передачи срочных и несрочных ЭПД из банка S_i в банк S_j, $i,j = \overline{1,n}$;

$p_{i0}^{(1)}$, $p_{i0}^{(2)}$ – вероятности передачи срочных и несрочных ЭПД из банка S_i в другие банки, не входящие в нашу банковскую сеть, $i = \overline{1,n}$;

$r_{0i}^{(1)}$ –плата клиента банку S_i за срочность платежа, $r_{0i}^{(2)} = 0$;

$R_{i0}^{(1)}$, $R_{i0}^{(2)}$ – соответственно величина срочного и несрочного платежа, которые клиент передает через банк S_i в другие банки, не входящие в нашу банковскую сеть;

$r_{ji}^{(1)}$, $r_{ji}^{(2)}$ – соответсвенно величина каждого срочного и несрочного платежа, передаваемого из банка S_j в банк S_i, напомним, что $P\left\{r_{ji}^{(c)} = R_{ji}^{(c)}\right\} = 1$, $i,j = \overline{1,n}$, $c = 1,2$;

$R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$ – плата банка-плательщика S_i РЦ за передачу соответственно срочного и несрочного ЭПД;

$r_i^{(1)}$, $r_i^{(2)}$ – величина увеличения дохода банка S_i в ед. вр. за счет процентов на денежные средства от находящихся в нем соответственно срочных и несрочных платежей, $i = \overline{1,n}$.

Как только банк установил сумму резервов для проведения срочных и несрочных платежей, эти деньги выпадают из оборота банка. Поэтому банк заинтересован в том, чтобы суммы резервов были минимальными, точнее, надо минимизировать сумму произведений величины резерва на время отвлечения этого резерва. Но если в начале дня установить малые резервы, а затем увеличивать их при необходимости, то за каждое увеличение резерва надо платить, эти выплаты также нужно минимизировать. Для этого нужно решить задачу (4).

Используя данную модель, можно также решить полезную для практики задачу нахождения оптимального числа сотрудников банков, занимающихся обработкой срочных и несрочных платежей на различных интервалах времени величиной $T - t_0$:

$$\begin{cases} W_i(T, m_{i1}, m_{i2}) = \frac{1}{T-t_0} \int\limits_{t_0}^{T} \left[v_i(t) + \sum\limits_{c=1}^{2} (e_{ic}N_{ic}(t) - E_{ic}m_{ic}) \right] dt \to \max\limits_{m_{i1}, m_{i2}}, \\ m_{ic} \leq M_{ic}, \; i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (5)$$

где e_{i1}, e_{i2} –плата за пребывание (задержку) в банке S_i соответственно срочного и несрочного платежа, E_{i1}, E_{i2} – заработная плата в ед. вр. сотрудника банка S_i, занимающегося обработкой соответственно срочных и несрочных платежей, M_{ic} – некоторые ограниченные константы, $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$.

Уточним данную модель для использования при решениии вышеуказанных задач с учетом вычисления чистых позиций банков-участников в клиринговых системах расчетов. Несрочные платежи накапливаются в течение некоторого времени (настраиваемый параметр может изменяться от 15 мин. до 4 часов), а затем проводятся в режиме клирингового расчета. В отличие от валовых систем расчетов, в которых каждый платеж обрабатывается отдельно, в клиринговых системах производится многосторонний зачет взаимных встречных платежей банков-участников, в результате которого оплате или получению подлежит только разность между суммами взаимных обязательств, которая называется чистой позицией участника расчетов. Пусть, например, несрочные платежи накапливаются в течение некоторого времени $[0, t_1)$. Тогда ожидаемый доход банка S_i, связанный с такими платежами, равен

$$v_i^{(not\ im.p.)}(t_1) = \lambda_{i2} r_{0i}^{(2)} t_1 - \mu_{i2} b_{i0}^{(2)} \int\limits_0^{t_1} \min(N_{i2}(s), m_{i2})\, ds,$$

а в частном случае ($m_{i2} = 1$ и S_{i2} функционирует в условиях высокой нагрузки, $i = \overline{1, n}$) - $v_i^{(not\ im.p)}(t_1) = \left(\lambda_{i2} r_{0i}^{(2)} - \mu_{i2} b_{i0}^{(2)} \right) t_1$. В этом случае чистая позиция банка S_i равна

$$v_i^{(p.i.)}(t_1) = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} \left(\lambda_{j2} r_{0j}^{(2)} - \lambda_{i2} r_{0i}^{(2)} + \mu_{i2} b_{i0}^{(2)} - \mu_{j2} b_{j0}^{(2)} \right) \times$$
$$\times u \left(\lambda_{j2} r_{0j}^{(2)} - \lambda_{i2} r_{0i}^{(2)} + \mu_{i2} b_{i0}^{(2)} - \mu_{j2} b_{j0}^{(2)} \right) t_1,$$

а ожидаемый доход банка S_i на данном интервале:

$$v_i(t_1) = v_{i0} + \left(c_i^{(1)} + c_i^{(2)} - \mu_{i1} b_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} \mu_{j1} a_{ji}^{(1)} p_{ji}^{(1)} - \mu_{i1} \sum_{j=0}^{n} b_{ij}^{(1)} p_{ij}^{(1)} \right) t_1 + v_i^{(p.i.)}(t_1).$$

И наконец, рассмотрим ожидаемые доходы РЦ. Пусть РЦ меняет величину ресур-ов банков в моменты времени $0 < t_1 < t_2 < .. < t_{m-1} < t_m = T$. Рассмотрим интервал $t_{k-1}, t_k)$. Обозначим через $\mu_{i1}^{(k)}$ – интенсивность обработки срочных платежей банком S_i, $N_{i1}^{(k)}(s)$ – среднее число срочных платежей в банке S_i, s_{ik} – доход РЦ за выдачу правки банку S_i об ожидаемых поступлениях на интервале времени $[t_{k-1}, t_k)$. Тогда $_i^{(1)}\mu_{i1}^{(k)} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \min\left(N_{i1}^{(k)}, m_{i1}\right) ds + b_i^{(2)} + q_i(t_{k-1}) + s_{ik}$ – доход РЦ от обработки срочных ЭПД, от передачи несрочного ЭПД, от изменения резерва банка S_i и за выдачу справ-и этому банку. Общий ожидаемый доход РЦ на интервале времени $[0, T]$ равен

$$v_{FSC}(0,T) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_{i1}^{(k)} b_i^{(1)} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \min\left(N_{i1}^{(k)}, m_{i1}\right) ds + b_i^{(2)} + q_i(t_{k-1}) + s_{ik} \right],$$

а в частном случае:

$$v_{FSC}(0,T) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_{i1}^{(k)} b_i^{(1)} (t_k - t_{k-1}) + b_i^{(2)} + q_i(t_{k-1}) + s_{ik} \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Matalytski M.* Some results of analysis and optimization HM-networks // Queues: flows, systems, networks. Proceedings of the Intern. Conf. "Mathematical Methods for Increasing Efficiency of Information Telecommunication Networks". Minsk: BSU, 2009.
2. *Matalytski M., Koluzaeva K.* Analysis and optimization of Markov HM-networks with stochastic incomes from transitions between their states // Scientific Research of the Institute of Mathematics Czestachova University of Technology. 2008. V. 1. № 7.
3. *Маталыцкий М. А., Колузаева Е. В.* Об одном рекуррентном по моментам времени методе анализа средних значений для открытых сетей с однотипными заявками // Вестник ГрГУ. Сер.2. 2008. № 2. С. 95–100.