# АНАЛИЗ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

**Е. Колузаева**

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы*
*Гродно, Беларусь*
koluzaeva@gmail.com

В статье рассматриваются сети массового обслуживания (МО) функционирующие в переходном режиме и методы нахождения средних характеристик таких сетей. Сформулированы некоторые задачи оптимизации для этих сетей и описаны способы их решенщения с помощью ЭВМ.

*Ключевые слова:*метод производящих функций, рекуррентный по моментам времени метод, компьютерная оптимизация.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сети МО в переходном режиме являются адекватными математическими моделями функционирования многих реальных объектов, например, банковских сетей, страховых компаний, информационно-компьютерных сетей и др. Актуальными являются задачи нахождения различных характеристик таких сетей и задачи их оптимизации.

## 2. МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТЕЙ МО

В последнее десятилетие одним из основных направлений развития сетевой индустрии становятся беспроводные сети передачи данных. Это объясняется рядом достоинств, присущих данным сетям: гибкость архитектуры сети, высокая скорость передачи информации, высокая степень защиты от несанкционированного доступа и т.д., а также возможность эффективного решения ряда актуальных задач описанных в [1].Как известно [2] наиболее адекватными моделями беспроводных локальных сетей (БЛС) являются сети МО, функционирующие в условиях высокой нагрузки, когда ко всем системам сети всегда имеются непустые очереди. Важной задачей анализа сетей МО, как моделей различных беспроводных сетей обработки информации, является их исследование в условиях высокой нагрузки, когда параметры сети меняются со временем.

Будем рассматривать открытую экспоненциальную сеть МО произвольной топологии с однотипными заявками и многолинейными системами обслуживания (СМО).

Под состоянием сети в момент времени $t$ будем понимать вектор $k(t) = (k, t) = (k_1, k_2, \ldots, k_n, t)$, где $k_i$ – число заявок в системе $S_i$, $i = \overline{1,n}$. $I_i$ – вектор размерности $n$, состоящий из нулей, за исключением $i$-й компоненты, которая равна 1, $i = \overline{1,n}$; $p_{ij}$ – вероятность перехода заявки после обслуживания в системе $S_i$ в систему $S_j$, $i, j = \overline{0,n}$, под системой $S_0$ при этом мы понимаем внешнюю среду; $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ – функция Хевисайда. Будем рассматривать случай, когда параметры входящего потока заявок и обслуживания зависят от времени, т.е. на интервале времени $[t, t + \Delta t)$ в сеть поступает заявка с вероятностью $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$, и если в момент $t$ на обслуживании в линии $i$-й СМО находится заявка, то в интервале $[t, t + \Delta t)$ ее обслуживание закончится с вероятностью $\mu_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$.

Предположим, что описанная ранее сеть состоит из однолинейных СМО, т.е. $m_i = 1$, $i = \overline{1,n}$, и все системы сети функционируют в режиме высокой нагрузки, т.е. $k_i(t) > 0 \quad \forall t > 0$, $i = \overline{1,n}$, тогда система разностно-дифференциальных уравнений для вероятностей состояний такой сети примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dP(k,t)}{dt} = &-\left[\lambda(t) + \sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\right]P(k,t) + \lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)P(k - I_i, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)p_{i0}P(k + I_i, t) + \sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)p_{ij}u(k_j)P(k + I_i - I_j, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим $n$-мерную производящую функцию:

$$\Psi_n(z,t) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k_1, k_2, .., k_n, t)z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot z_n^{k_n}, \tag{2}$$

где $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$. Доказано [3], что если в начальный момент времени сеть МО находится в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0)$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, то выражение для производящей функции (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_n(z,t) = a_0(t)\exp\left\{(\Lambda(t) - \Lambda(0))\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_i\right\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(M_i(t) - M_i(0))\frac{p_{i0}}{z_i}\right\} \times \\ \times\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(M_i(t) - M_i(0))p_{ij}\frac{z_j}{z_i}\right\}\prod_{l=1}^{n}z_l^{\alpha_l}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\Lambda(t) = \int\lambda(t)dt, \quad M_i(t) = \int\mu_i(t)dt, \quad i = \overline{1,n}$ , а

$$a_0(t) = \exp\left\{-(\Lambda(t) - \Lambda(0)) - \sum_{i=1}^{n}(M_i(t) - M_i(0))\right\}.$$

Если разложить входящие в (3) экспоненты в ряд Маклорена, то можно получить следующее выражение для производящей функции (2)

$$\Psi_n(z,t) = a_0(t)\sum_{l_1=0}^{\infty}\dots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\dots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}(\Lambda(t)-\Lambda(0))^{\sum\limits_{i=1}^{n} l_i}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i}p_{i0}^{q_i}\left(\prod\limits_{j=1}^{n}p_{ij}\right)^{r_i}}{l_i!q_i!r_i!}(M_i(t)-M_i(0))^{q_i+r_i}\,z_i^{\alpha_i+l_i-q_i-r_i+R}\right], \tag{4}$$

где $R=\sum\limits_{i=1}^{n} r_i$. Соотношение (4) позволяет находить вероятности состояний сети. Например, для того, чтобы найти вероятность состояния $P(1,1,\dots,1,t)$, необходимо посчитать коэффициент при $z_1 z_2\cdot\ldots\cdot z_n$ в разложении функции $\Psi_n(z,t)$ в многократный ряд (4). Если взять частную производную от (4) по $z_c$, то можно получить выражение для среднего числа заявок в системе $c$

$$N_c(t) = a_0(t)\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}k_c\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\alpha_1-r_1+R-1}\dots\sum_{q_n=0}^{\alpha_n-r_n+R-1}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{((\Lambda(t)-\Lambda(0))\,p_{0i})^{k_i-\alpha_i+q_i+r_i-R}\,p_{i0}^{q_i}}{(k_i-\alpha_i+q_i+r_i-R)!q_i!r_i!}\left(\prod_{\substack{j=1,\\ p_{ij}\neq 0}}^{n}p_{ij}\right)^{r_i}(M_i(t)-M_i(0))^{q_i+r_i}\right]$$

где $k_c=\alpha_c+l_c-q_c-r_c+R$.

## 3. РЕКУРРЕНТНЫЙ ПО МОМЕНТАМ ВРЕМЕНИ МЕТОД АНАЛИЗА СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОТКРЫТЫХ СЕТЕЙ МО

Нахождение средних характеристик сетей МО в переходном режиме, зависящих от времени, является довольно трудноразрешимой задачей. Применение описанного в предыдущем параграфе метода производящих функций усложнено нахождением сумм многократных рядов и при большом числе состояний сети время вычислений очень велико. Метод, рассматриваемый в данном параграфе, позволяет избежать вычислительных трудностей и находить различные средние характеристики открытых сетей с многолинейными СМО и произвольными распределениями времен обслуживания заявок в них за приемлемое процессорное время.

Рассмотрим открытую сеть МО, состоящую из $n$ систем обслуживания $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$. Дисциплины обслуживания в каждой из них – FIFO. Система обслуживания $S_i$ состоит из $m_i$ идентичных линий обслуживания, время обслуживания заявок в которых распределено по произвольному закону с интенсивностью $\mu_i$, $i=\overline{1,n}$. Пусть

$\lambda$ – интенсивность поступления заявок в сеть, $p_{ij}$ – вероятность того, что заявка после обслуживания в системе $S_i$ поступит на обслуживание в систему $S_j$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $i, j = \overline{1, n}$.

Предположим, что сеть функционирует на некотором большом промежутке времени $[t_0, t_0 + T]$. Обозначим $N_i(t)$, $\tau_i(t)$, $\rho_i(t)$, – соответственно среднее число заявок, среднее время пребывания заявок (в очереди и на обслуживании) и среднее число занятых линий обслуживания в $i$-ой СМО на интервале времени $[t_0, t_0 + T]$, $t < T$, $i = \overline{1, n}$.

Можно получить рекуррентные по моментам времени соотношения для средних значений открытой сети МО:

$$\rho_i(t) = \min\left(N_i(t),\, m_i\right),\ \tau_i(t) = \frac{1}{\mu_i} + \bar{T}_i(t),\ N_i(t + \Delta t) = \lambda_i \tau_i(t),\ i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $\lambda_i = \lambda e_i, i = \overline{1, n}$, а $e_j = p_{0j} + \sum\limits_{i=1}^{n} e_i p_{ij}$, $j = \overline{1, n}$. Значение $\bar{T}_i(t)$ соответствует среднему времени, через которое вновь пришедшая заявка из очереди $i$-ой СМО поступит на обслуживание:

$$\bar{T}_i(t) = 0, \text{ если } N_i(t) - \rho_i(t) = 0,$$

$$\bar{T}_i(n) = \frac{N_i(t) - \rho_i(t) + 1}{m_i}\left(\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\mu_i \sigma_i^2}{2}\right), \text{ если } 0 < N_i(t) - \rho_i(t) < m_i,$$

$$\bar{T}_i(t) = \frac{1}{\mu_i}(\Theta_i - 1) + \frac{N_i(t) - \rho_i(t) - \Theta_i m_i + 1}{m_i}\left(\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\mu_i \sigma_i^2}{2}\right), \text{ если } N_i(t) - \rho_i(t) \geq m_i,$$

где $\sigma_i^2$ – дисперсия времени обслуживания заявок в каждой линии $i$-ой СМО, $\Theta_i$ – целая часть от $\frac{N_i(t) - \rho_i(t)}{m_i}$. Начальные условия могут быть выбраны следующим образом: $N_i(0) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Описанный метод позволяет находить средние характеристики сети, зависящие от времени и легко реализуется на компьютере.

## 4. КОМПЬЮТЕРНАЯ ОПРИМИЗАЦИЯ СЕТЕЙ МО В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим некоторые задачи связанные с оптимизацией сетей МО, функционирующих в переходном режиме. Введем следующие обозначения: $d_i$ – затраты на содержание одной заявки в $i$-ой СМО, а $E_i$ – затраты на содержание одной линии обслуживания в $i$-ой СМО, $i = \overline{1, n}$. Тогда критерий минимизации затрат на функционирование сети имеет вид:

$$W(T, m) = W(T, m_1, m_2, ..., m_n) = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} (d_i N_i(t) + E_i m_i) dt, \qquad (6)$$

а задача оптимизации:

$$\begin{cases} W(T, m_1, m_2, ..., m_n) \to \min\limits_{m_1, m_2, ..., m_n}, \\ m_i \le a_i, \ i = \overline{1, n}, \end{cases} \qquad (7)$$

где $a_i$, $i = \overline{1, n}$, – заданные числа, в пределах которых может меняться число линий обслуживания в $i$-ой СМО. Согласно формуле (5), значения $N_i(t)$ могут находиться для сколь угодно малого приращения времени $\Delta t$, а критерий (6) может быть заменен приближенным выражением:

$$W(T, m) = \frac{\Delta t}{T - t_0} \sum_{j=0}^{(T-t_0)/\Delta t} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{2} \left| N_i(t_0 + (j+1)\Delta t) + N_i(t_0 + j\Delta t) \right| + \sum_{i=1}^{n} E_i m_i. \qquad (8)$$

Из соотношений (5) видно, что значение $N_i(t)$ зависит только от числа линий в $i$-ой СМО и не зависит от числа линий в остальных системах, поэтому критерий (8) будет достигать своего минимума для значений $(m_1, m_2, ..., m_n)$, при которых затраты для каждой системы в отдельности будут минимальными. Задача (7) является задачей целочисленного программирования, решить ее можно с помощью ПЭВМ методом полного перебора. Благодаря простоте расчетов, используя метод (5) можно решать оптимизационные задачи для сетей большой размерности за приемлемое процессорное время.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Вишневский В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М: Техносфера, 2003.
2. *Меликов А. З., Понаморенко Л. А.,Паладюк В. В.* Телетрафик. Модели, методы, оптимизация. Киев: ИПК "Политехника", 2007.
3. *Колузаева Е. В., Матальцкий М. А.* Нахождение вероятностей состояний моделей информационно-компьютерных сетей с зависимыми от времени параметрами потока и обслуживания, функционирующих в условиях высокой нагрузки // Вестник ГрГУ. Сер. 2. 2009. – № 1.