ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ АСИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА С ИНИЦИИРОВАНИЕМ ЛИШНИХ СОБЫТИЙ

А. Горцев, М. Леонова, Л. Нежельская

Томский государственный университет

Томск, Россия

mleonova86@mail.ru

Рассматривается задача об оценке состояний асинхронного дважды стохастического потока с инициированием лишних событий(асинхронный обобщенный поток событий) с двумя состояниями, являющегося математической моделью информационных потоков заявок, циркулирующих в системах и сетях массового обслуживания. Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности.

Ключевые слова: обобщенный асинхронный поток событий, состояние потока, апостериорная вероятность состояния, оценка состояния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы и сети массового обслуживания (СМО, СеМО) являются широко применяемой математической моделью реальных физических, технических, экономических и других объектов и систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, в свою очередь, широко применяются в качестве математической модели реальных процессов. В частности, информационные потоки заявок, циркулирующие в системах и сетях связи, в цифровых сетях интегрального обслуживания, в измерительных системах достаточно адекватно описываются случайными потоками событий.

Условия функционирования реальных объектов и систем таковы, что если в отношении параметров обслуживающих устройств можно сказать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков событий этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков обычно меняются со временем, часто эти изменения носят случайный характер,что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков. С другой стороны, режимы функционирования СМО и СеМО непосредственно зависят от интенсивностей входящих потоков. Вследствие этого важной задачей является задача оценки в произвольный момент времени состояния интенсивности потока событий по наблюдениям за этим потоком.

Одними из первых работ по оценке состояний дважды стохастических потоков, по-видимому, являются [1,2], в которых рассматривается асинхронный дважды стохастический поток событий с двумя состояниями(МС-поток событий или поток с переключениями). В настоящей статье решается задача об оптимальной оценке состояний асинхронного дважды стохастического потока с инициированием лишних событий(далее обобщенный асинхронный поток). Отметим, что рассматриваемый обобщенный асинхронный поток событий достаточно адекватен при описании цифровых сетей интегрального обслуживания и относится к классу МАР-потоков [3,4] с определенными ограничениями на параметры последних [5]. В данной статье находятся выражения для апостериорных вероятностей состояний обобщенного асинхронного потока событий. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений, и обеспечивающей минимум полной вероятности ошибки вынесения решения [6].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается обобщенный асинхронный поток, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-ом состоянии распределена по экспоненцильному закону с параметром α_i, $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p $(0 \le p \le 1)$ лишнее событие во втором состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется лишнее событие). Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q $(0 \le q \le 1)$ лишнее событие в первом состоянии. Очевидно, что в сделанных предпосылках $\lambda(t)$–марковский процесс. Вариант возникающей ситуации показан на рисунке 1, где 1, 2 –состояния случайного процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, \ldots$ – моменты наступления событий; $t_2, t_6, \ldots$ – моменты инициирования лишних событий; t_2–момент инициирования с вероятностью p лишнего события во втором состоянии; t_6–момент инициирования с вероятностью q лишнего события в первом состоянии. Если $p = q = 0$, то имеет место асинхронный поток [7]. Так как переходы процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние не привязаны к моментам наступления событий пуассоновских потоков, то в названии потока присутствует слово "асинхронный". Так как процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и лишние события) являются ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий $t_1, t_2, \ldots$, то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса (потока) $\lambda(t)$ в момент окончания наблюдений.

Рассматривается установившийся(стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где

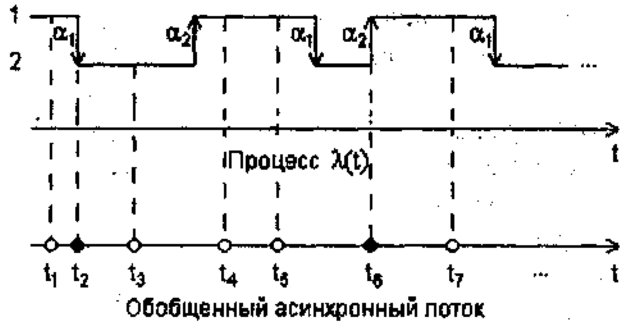

Рис. 1. Формирование обобщенного асинхронного потока

t_0–начало наблюдений, t–окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Для вынесения решения о состоянии ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $\omega(\lambda_i | t_1, \ldots, t_m)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t $\lambda(t) = \lambda_i$ (m - количество наблюденных событий за время t), при этом $\sum_{i=1}^{2} \omega(\lambda_i | t_1, \ldots, t_m) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится путем сравнения апостериорных вероятностей: если $\omega(\lambda_j | t_1, \ldots, t_m) \geq \omega(\lambda_i | t_1, \ldots, t_m)$; $i, j = 1, 2$; $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

3. ВЫВОД АПОСТЕРИОРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ПОТОКА

Вывод уравнений для апостериорных вероятностей осуществим, используя известную методику [6] : сначала рассмотрим дискретные наблюдения через равные достаточно малые промежутки Δt, а затем совершим предельный переход при стремлении Δt к нулю. Пусть время меняется дискретно с конечным шагом Δt : $t = k\Delta t$, $k = 0, 1, \ldots$. Рассмотрим двумерный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)} = \lambda(k\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_i$, $i = 1, 2$), $r_k = r_k(\Delta t) = r[k\Delta t] - r[(k-1)\Delta t]$ – число событий, наблюденных на временном интервале $((k-1)\Delta t,\ k\Delta t)$ длины Δt, $r_k = 0, 1, \ldots$. Обозначим $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \ldots, r_m)$–последовательность наблюденных событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((k-1)\Delta t,\ k\Delta t)$ длительности Δt, $k = \overline{0, m}$ (r_0–число наблюденных событий на интервале $(-\Delta t,\ 0)$; так как на этом интервале наблюдений не производится, то r_0 можно задать произвольно, например, $r_0 = 0$); $\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)})$–последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ в моменты времени $k\Delta t$, $k = \overline{0, m}$ ($\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$, $i = 1, 2$). Обозначим через $\omega(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ совместную вероятность значений $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$, $\mathbf{r}_m$. Процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$ – марковский, что вытекает из сделанных предпосылок и его конструкции. Тогда совместная вероятность $\omega(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ представляется как произведение переходных вероятностей

$$\omega(\lambda^{(m)}, r_m) = \omega(\lambda^{(0)}, r_0)\prod_{k=1}^{m} p\,(\lambda^{(k)}, r_k |\, \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}),$$

где $p\,(\lambda^{(k)}, r_k|\,\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$–вероятность перехода процесса $(\lambda(k\Delta t), r_k(\Delta t))$ за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ в состояние $(\lambda^{(k)}, r_k)$.

Рассмотрим переходную вероятность

$$p\,(\lambda^{(k)}, r_k|\,\lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) = p\,(\lambda^{(k)}|\,\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})p\,(r_k|\,\lambda^{(k-1)}, r_{k-1}, \lambda^{(k)}). \qquad (1)$$

Первый сомножитель в (1) запишется в виде $p\,(\lambda^{(k)}|\,\lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) = p\,(\lambda^{(k)}|\,\lambda^{(k-1)})$, так как на значение процесса $\lambda(u)$ в момент времени $k\Delta t$ число наблюденных событий r_{k-1} на интервале $((k-2)\Delta t, (k-1)\Delta t)$ совершенно не влияет (процесс $\lambda(k)$ "живет своей жизнью"), значение же $\lambda^{(k-1)}$ процесса $\lambda(u)$ в момент времени $(k-1)\Delta t$ не зависит от предыстории в силу марковости процесса $\lambda(u)$. Второй сомножитель в (1) запишется в виде $p\,(r_k|\,\lambda^{(k-1)}, r_{k-1}, \lambda^{(k)}) = p\,(r_k|\,\lambda^{(k-1)})$, так как, во-первых, количество r_k наблюденных на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$событий не зависит от будущего значения процесса $\lambda(u)$ в момент времени $k\Delta t$; во-вторых, r_k не зависит от количества r_{k-1} наблюденных на интервале $((k-2)\Delta t, (k-1)\Delta t)$ событий в силу того, что потоки событий в обоих состояниях пуассоновские.

Обозначим $\omega(\lambda^{(k)}|\,r_k)$–апостериорная вероятность того, что в момент времени $t = k\Delta t$ состояние процесса $\lambda(t)$ есть $\lambda^{(k)}$ $(k = m, m+1; \lambda^{(k)} = \lambda_i, i = 1, 2)$. Тогда, используя результаты, приведенные в [8], получаем рекуррентную формулу для апостериорной вероятности $\omega(\lambda^{(m+1)}|\,r_{m+1})$:

$$\omega(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \omega(\lambda^{(m)}|\,r_m)p\,(\lambda^{(m+1)}|\,\lambda^{(m)})p\,(r_{m+1}|\,\lambda^{(m)})}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2}\sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \omega(\lambda^{(m)}|\,r_m)p\,(\lambda^{(m+1)}|\,\lambda^{(m)})p\,(r_{m+1}|\,\lambda^{(m)})}. \qquad (2)$$

Совершим теперь предельный переход при $\Delta t \to 0$ в (2). Имеем $\omega(\lambda^{(m+1)}|\,r_{m+1}) = \omega(\lambda^{(m+1)}|\,r_{m+1}(t+\Delta t)) = \omega(\lambda^{(m+1)}|\,t+\Delta t)$, $\omega(\lambda^{(m)}|\,r_m) = \omega(\lambda^{(m)}|\,r_m(t)) = \omega(\lambda^{(m)}|t)$. Положим для конкретности в (2) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$. Сначала рассмотрим случай $r_{m+1} = 0$, когда на интервале $(t, t+\Delta t)$ нет событий наблюдаемого потока (т.е. рассмотрим поведение апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|\,t)$ на интервале между наблюденными событиями, скажем, между моментами времени t_{i-1} и t_i). Имеем $p\,(\lambda_1|\,\lambda_1) = 1 - \alpha_1\Delta t + o(\Delta t)$, $p\,(\lambda_1|\,\lambda_2) = (1-q)\alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$, $p\,(\lambda_2|\,\lambda_2) = 1 - \alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$, $p\,(\lambda_2|\,\lambda_1) = (1-p)\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)$, $p\,(r_{m+1} = 0|\,\lambda_j) = 1 - \lambda_j\Delta t + o(\Delta t)$, $j = 1, 2$. Тогда,подставляя последние выражения в (2), находим числитель A и знаменатель B в (2):

$$A = (1 - \lambda_1\Delta t - \alpha_1\Delta t)\omega(\lambda_1|\,t) + (1-q)\alpha_2\Delta t\omega(\lambda_2|\,t) + o(\Delta t), \qquad (3)$$

$$B = 1 - \Delta t[(\lambda_1 + p\alpha_1)\omega(\lambda_1|\, t) + (\lambda_2 + q\alpha_2)\omega(\lambda_2|\, t)] + o(\Delta t). \tag{4}$$

Подставляя (3), (4) в (2), учитывая при этом, что $B^{-1} = 1 + \Delta t[(\lambda_1 + p\,\alpha_1)\omega(\lambda_1|\, t) + (\lambda_2 + q\alpha_2)\omega(\lambda_2|\, t)] + o(\Delta t)$, получаем с точностью до членов $o(\Delta t)$

$$\omega(\lambda_1|\, t + \Delta t) - \omega(\lambda_1|\, t) = -\Delta t(\lambda_1 + \alpha_1)\omega(\lambda_1|\, t) + \Delta t(1-q)\alpha_2\omega(\lambda_2|\, t) +$$

$$+\Delta t\omega(\lambda_1|\, t)[(\lambda_1 + p\,\alpha_1)\omega(\lambda_1|\, t) + (\lambda_2 + q\alpha_2)\omega(\lambda_2|\, t)] + o(\Delta t).$$

Деля левую и правую части последнего равенства на Δt, учитывая при этом, что $\omega(\lambda_2|\, t) = 1 - \omega(\lambda_1|\, t)$, и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, находим

$$\frac{d\omega(\lambda_1|\, t)}{dt} = (1-q)\alpha_2 - [\lambda_1 + \alpha_1 + (1-2q)\alpha_2 - \lambda_2]\omega(\lambda_1|\, t) +$$

$$+(\lambda_1 - \lambda_2 + p\,\alpha_1 - q\alpha_2)\omega^2(\lambda_1|\, t). \tag{5}$$

Полученное уравнение (5) определяет поведение апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1|\, t)$ на полуинтервале $[t_{i-1}, t_i)$, т.е. между моментами наступления событий, причем на правом конце полуинтервала имеет место значение $\omega(\lambda_1|\, t_i - 0)$, на основе которого, как будет видно ниже, находится апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1|\, t_i + 0)$, являющаяся начальной для следующего полуинтервала $[t_i, t_{i+1})$.

Рассмотрим теперь вариант $r_{m+1} = 1$. Этот случай соответствует наблюдению одного события (скажем, в момент времени t_i) на интервале $(t, t + \Delta t)$. В силу ординарности наблюдаемого потока варианты $r_{m+1} = 2, 3, \ldots$ имеют вероятность $o(\Delta t)$. Рассмотрим два смежных интервала (t, t_i), $(t_i, t + \Delta t)$. Длительность первого: $t_i - t = \Delta t'$, длительность второго: $t + \Delta t - t_i = \Delta t''$. Имеем $\omega(\lambda_j|\, t) = \omega(\lambda_j|\, t_i - \Delta t')$, $p\,(r_{m+1} = 0|\lambda_j) = 1 - \lambda_j\Delta t + o(\Delta t)$, $p\,(r_{m+1} = 1|\lambda_j) = \lambda_j\Delta t + o(\Delta t), j = 1, 2$; $p\,(\lambda_1|\, \lambda_1) = 1 - \alpha_1\Delta t + o(\Delta t)$; $p\,(\lambda_1|\, \lambda_2) = q\alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$; $p\,(\lambda_2|\, \lambda_2) = 1 - \alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$; $p\,(\lambda_2|\, \lambda_1) = p\,\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)$. Тогда,подставляя последние выражения в (2), находим числитель A и знаменатель B в (2):

$$A = \Delta t[\lambda_1\omega(\lambda_1|\, t_i - \Delta t') + q\alpha_2\omega(\lambda_2|\, t_i - \Delta t')] + o(\Delta t), \tag{6}$$

$$B = \Delta t[(\lambda_1 + p\,\alpha_1)\omega(\lambda_1|\, t_i - \Delta t') + (\lambda_2 + q\alpha_2)\omega(\lambda_2|\, t_i - \Delta t')] + o(\Delta t). \tag{7}$$

Подставляя (6), (7) в (2), учитывая при этом, что $\omega(\lambda_1|\, t + \Delta t) = \omega(\lambda_1|\, t_i + \Delta t'')$, $\omega(\lambda_2|\, t_i - \Delta t') = 1 - \omega(\lambda_1|\, t_i - \Delta t')$, и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ одновременно стремятся к нулю), получаем

$$\omega(\lambda_1|t_i + 0) = \frac{q\alpha_2 + (\lambda_1 - q\alpha_2)\omega(\lambda_1|\, t_i - 0)}{\lambda_2 + q\alpha_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 + p\,\alpha_1 - q\alpha_2)\omega(\lambda_1|\, t_i - 0)},\; i = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Таким образом, в точке t_i (момент наблюдения события) апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1|\, t)$ претерпевает разрыв (имеет место конечный скачок). В качестве начального значения $\omega(\lambda_1|\, t_0 + 0) = \omega(\lambda_1|\, t_0 = 0)$ можно выбрать априорную финальную вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$: $\pi_1 = \lim \pi_1(t)$ при $t \to \infty$. Можно показать, что $\pi_1 = \alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Решая (с учетом формулы пересчета (8)) дифференциальное уравнение (5), находим явный вид апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1 | t)$:

$$\omega(\lambda_1|t) = \frac{\omega_1[\omega_2 - \omega(\lambda_1|t_i+0)] - \omega_2[\omega_1 - \omega(\lambda_1|t_i+0)]e^{-\beta(t-t_i)}}{\omega_2 - \omega(\lambda_1|t_i+0) - [\omega_1 - \omega(\lambda_1|t_i+0)]e^{-\beta(t-t_i)}}, \tag{9}$$

$$t_i \le t < t_{i+1},\ i = 1, 2, \dots;\ \beta = (\omega_2 - \omega_1)(\lambda_1 - \lambda_2 + p\,\alpha_1 - q\alpha_2),$$

$$\omega_1 = \frac{[\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2(1-2q)] - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}}{2(\lambda_1 - \lambda_2 + p\,\alpha_1 - q\alpha_2)},$$

$$\omega_2 = \frac{[\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2(1-2q)] + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}}{2(\lambda_1 - \lambda_2 + p\,\alpha_1 - q\alpha_2)}.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t:

1) в момент времени $t_0 = 0$ задается $\omega(\lambda_1|t_0 + 0) = \omega(\lambda_1|t_0 = 0) = \pi_1$;
2) по формуле (9) рассчитывается вероятность $\omega(\lambda_1|t)$ в любой момент времени t $(0 \le t < t_1)$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока;
3) по формуле (9) рассчитывается $\omega(\lambda_1|t)$ в момент времени t_1 $(\omega(\lambda_1|t_1) = \omega(\lambda_1|t_1 - 0))$, затем по формуле (8) производится пересчет апостериорной вероятности в точке $t = t_1$, при этом $\omega(\lambda_1|t_1 + 0)$ является начальным условием для $\omega(\lambda_1|t)$ на следующем шаге алгоритма;
4) по формуле (9) рассчитывается апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1|t)$ для любого $t\,(t_1 \le t < t_2)$, где t_2 – момент времени наступления второго события потока; в момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $\omega(\lambda_1|t) \ge \omega(\lambda_2|t)$ $(\omega(\lambda_1|t) \ge 1/2)$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$ и т.д.

Еще раз подчеркнем, что данный алгоритм обеспечивает минимальную полную вероятность ошибочного решения.

Рассмотренная модель обобщенного асинхронного потока событий охватывает все частные случаи, рассмотренные ранее.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оптимизация параметров адаптера при наблюдениях за МС-потоком // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. – С. 20–32.

2. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер.: Системы связи.– 1989. – Вып. 7. С. 46–54.
3. *Lucantoni D. M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Commun. Stat. Stochastic Models. – 1991. – V. 7. – P. 1–46.
4. *Дудин А. Н., Клименок В. И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками.– Минск, 2000.
5. *Василевская Т. П., Завгородняя М. Е., Шмырин И. С.* О соотношении моделей MAP-потока событий и асинхронного, полусинхронного и синхронного дважды стохастических потоков событий // Вестн. Томск. гос. ун-та. – 2004. – № 9(II). С. 20–32.
6. *Хазен Э. М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. – М.: Сов. радио, 1968.
7. *Васильева Л. А., Горцев А. М.* Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 12. С. 69–79.
8. *Бушланов И. В., Горцев А. М.* Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 9. С. 40–51.