МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ММР-ПОТОКА, УПРАВЛЯЕМОГО КВАЗИРАЗЛОЖИМОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА, В УСЛОВИИ РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ

А. Горбатенко

Томский государственный университет

Томск, Росиия

anngo86@mail.ru

В данной работе рассматривается ММР-поток, управляющая цепь которого является квазиразложимой. Находится асимптотическое распределение числа событий, наступивших в потоке, в условии растущего времени.

Ключевые слова: ММР-поток, квазиразложимая цепь Маркова, асимптотический анализ, условие растущего времени.

1. МАТЕМАТЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть задана эргодическая квазиразложимая цепь Маркова $k(t)$ [1], определенная матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{k\nu}$, а также задан набор условных интенсивностей $\lambda_k \geq 0$.

Обозначим $n(t)$ – число событий рассматриваемого потока, наступивших за время

Случайный поток однородных событий будем называть модулированным пуассоновским потоком (ММР-потоком)[2], управляемый цепью Маркова $k(t)$, если выполняется равенство

$$P\{n(t) = n+1 \mid n(t) = n,\ k(t) = k\}) = \lambda_k \cdot \Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{n(t) > n+1 \mid n(t) = n,\ k(t) = k\} = o(\Delta t).$$

Определим случайный процесс $\{k(t),\ n(t)\}$, который является двумерной цепью Маркова. Для ее распределения вероятностей $P(k,n,t) = P\{n(t) = n, k(t) = k\}$ нетрудно показать, что $P(k,n,t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k,n,t)}{\partial t} = \lambda_k\{P(k,n-1,t) - P(k,n,t)\} + \sum_{\nu} P(\nu,n,t)q_{\nu,k}. \quad (1)$$

Начальное условие для решения $P(k,n,t)$ этой системы определим в виде

$$P(k,n,t) = \begin{cases} R(k), & n=0; \\ 0, & n>0. \end{cases}$$

где $R(k)$ - стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова .

2. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим

$$H(k,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k,n,t) = R(k) M\{e^{jun(t)|k(t)=k}\}, \tag{2}$$

где $j = \sqrt{-1}$, [3].

С учетом (2) из (1) получим для этих функций задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(k,u,t)}{\partial t} = \lambda_k (e^{ju} - 1) H(k,u,t) + \sum\limits_{\nu} H(\nu,u,t) q_{\nu,k}, \\ H(k,u,0) = R(k). \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим:

$$H(u,t) = \{\ H(1,u,t),\ \ H(2,u,t),\ \ \dots\ \},\quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

и запишем задачу Коши (3) в матричной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\{Q + (e^{ju} - 1)\Lambda\}, \\ H(u,0) = R. \end{cases} \tag{4}$$

3. УСЛОВИЕ КВАЗИРАЗЛОЖИМОСТИ ЦЕПИ МАРКОВА

Цепь Маркова $k(t)$ будем называть квазиразложимой, если множество ее состояний можно разбить на m почти замкнутых классов $k_i(t)$, $i = \overline{1,m}$ (переход из одного класса в другой осуществляется крайне редко).

Для матрицы инфинитезимальных характеристик Q квазиразложимой цепи Маркова выполняется следующее условие:

$$Q = Q^{(1)} + \delta \cdot (Q^{(0)}), \delta \to 0. \tag{5}$$

Матрицы

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{22}^{(1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{mm}^{(1)} \end{pmatrix}_{m\times m},\quad Q^{(0)} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(0)} & Q_{12}^{(0)} & \dots & Q_{1m}^{(0)} \\ Q_{21}^{(0)} & Q_{22}^{(0)} & \dots & Q_{2m}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{m1}^{(0)} & Q_{m2}^{(0)} & \dots & Q_{mm}^{(0)} \end{pmatrix}_{m\times m}$$

также являются матрицами инфинитезимальных характеристик.

Диагональные элементы матрицы $Q^{(1)}$ $\{Q^{(1)}_{i,i}\}_{m_i\times m_i}$, $\sum m_i = m$, $i = \overline{1,m}$ определяют интенсивности вероятностей переходов из одного состояния в другое внутри каждого замкнутого класса $k_i(t)$ и являются матрицами инфинитезимальных характеристик.

Недиагональные элементы матрицы $Q^{(0)}$: $\{Q^{(0)}_{i,j}\}_{m_i\times m_j} \neq 0$, $i \neq j$, $i,j = \overline{1,m}$ являются ненулевыми матрицами.

С учетом условия (5) задачаи Коши (4) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,t,\delta)}{\partial t} = H(u,t,\delta)\{Q^{(1)} + \delta Q^{(0)} + (e^{ju}-1)\Lambda\}, \\ H(u,0,\delta) = R. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть существует предел

$$\lim_{\delta\to 0} H(k,u,t,\delta) = F(k,u,t). \tag{7}$$

Обозначим $F(u,t) = \{\ F(1,u,t),\ \ F(2,u,t),\ \ \dots\ \}$.

В задаче (6), с учетом (7), выполним предельный переход при $\delta \to 0$, тогда для $F(u,t)$ получим совокупность независимых задач Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(u,t)}{\partial t} = F(u,t)\{Q^{(1)} + (e^{ju}-1)\Lambda\}, \\ F(u,0) = R. \end{cases} \tag{8}$$

С учетом вида матрицы $Q^{(1)}$ получим совокупность m независимых систем диффиренциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial F^{(1)}(u,t)}{\partial t} = F^{(1)}(u,t)\{Q^{(1)}_{11} + (e^{ju}-1)\Lambda^{(1)}\}, \\ \frac{\partial F^{(2)}(u,t)}{\partial t} = F^{(2)}(u,t)\{Q^{(1)}_{22} + (e^{ju}-1)\Lambda^{(2)}\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F^{(m)}(u,t)}{\partial t} = F^{(m)}(u,t)\{Q^{(1)}_{mm} + (e^{ju}-1)\Lambda^{(m)}\}, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$F(u,t) = \{\ (F^{(1)}(u,t))_{1\times m_1},\ \ (F^{(2)}(u,t))_{1\times m_2},\ \ \dots,\ \ (F^{(m)}(u,t))_{1\times m_m}\ \},$$

$$F^{(i)}(u,t) = \{\ F(1+m_{i-1},u,t),\ \ F(2+m_{i-1},u,t),\ \ \dots,\ \ F((m_i+m_{i-1},u,t)\ \},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda^{(m)} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^{(i)}_{m_i\times m_i} = \begin{pmatrix} \lambda_{1+m_{i-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{2+m_{i-1}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{m_i+m_{i-1}} \end{pmatrix}.$$

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{gathered} F^{(1)}(u,0) = c_1 r_1, \\ F^{(2)}(u,0) = c_2 r_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ F^{(m)}(u,0) = c_m r_m, \end{gathered} \tag{10}$$

где $(r_i)_{1\times m_i}$, $i = \overline{1,m}$ - векторы стационарных распределений вероятностей значений $k_i(t)$, определяемые однородной системой линейных алгебраических уравнений

$$r_i Q_{ii}^{(1)} = 0, \tag{11}$$

и условием нормировки

$$r_i E_i = 0. \tag{12}$$

Константы c_i можно найти, решив систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} c_1 r_1 Q_{11}^{(0)} E_1 + c_2 r_2 Q_{21}^{(0)} E_1 + \dots + c_m r_m Q_{m1}^{(0)} E_1 = 0, \\ c_1 r_1 Q_{12}^{(0)} E_2 + c_2 r_2 Q_{22}^{(0)} E_2 + \dots + c_m r_m Q_{m2}^{(0)} E_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 r_1 Q_{1m}^{(0)} E_m + c_2 r_2 Q_{2m}^{(0)} E_m + \dots + c_m r_m Q_{mm}^{(0)} E_m = 0. \end{cases} \tag{13}$$

4. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ

Определим параметр T, принимающий достаточно большие значения. Положим $t = \tau T$, где τ - переменная, имющая смысл нормированного времени.

В асимптотическом условии растущего времени найдем характеристическую функцию числа $m(t)$ событий ММР-потока, наступивших за достаточно большой промежуток времени продолжительностью $t = \tau T$ при $T \to \infty$ [3, 4].

Обозначим $\varepsilon = 1/T$ и в системе (9) выполним замены

$$\varepsilon t = \tau,\ u = \varepsilon x,\ F^{(i)}(u,t) = F_1^{(i)}(x,\tau,\varepsilon), \tag{14}$$

получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1^{(i)}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = F_1^{(i)}(x,\tau,\varepsilon)\{Q_{ii}^{(1)} + (e^{j\varepsilon x} - 1)\Lambda^{(i)}\},\ i = \overline{1,m}. \tag{15}$$

Теорема. *Если существуют пределы*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_1^{(i)}(x,\tau,\varepsilon) = F_1^{(i)}(x,\tau),\ i = \overline{1,m}, \qquad \textit{то}$$

$$F_1^{(i)}(u,\tau) = c_i r_i e^{jx\kappa_i\tau}, \tag{16}$$

величины κ_i определяются равенствами

$$\kappa_i = r_i \Lambda^i E_i. \tag{17}$$

Доказательство. В системе (15) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим системы $F_1^{(i)}(x,\tau) Q_{ii}^{(1)} = 0$, решения $F_1^{(i)}(x,\tau)$ которых запишем в виде

$$F_1^{(i)}(x,\tau) = c_i r_i \Phi_1^{(i)}(x,\tau), \tag{18}$$

где r_i определяеются системой (11) и условием нормировки (12), c_i находятся из системы (13). Для нахождения функций $\Phi_1^{(i)}(x,\tau)$ домножим справа обе части уравнений (15)на единичный вектор-столбец, и, принимая во внимание свойства матриц инфинетизимальных характеристи $Q_{ii}^{(i1)}E_i = 0$, получим равенства $\varepsilon\frac{\partial F_1^{(i)}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = (e^{j\varepsilon x}-1)F_1^{(i)}(x,\tau,\varepsilon)\Lambda^{(i)}$. Поделив в этих равенствах левую и правую части на ε при $\varepsilon \to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(e^{j\varepsilon x}-1) = jx$, получим уравнения, определяющие функции $\Phi_1^{(i)}(x,\tau)$

$$\frac{\partial\Phi_1^{(i)}(x,\tau)}{\partial\tau} = jxr_i\Lambda^{(i)}E_i\Phi_1^{(i)}(x,\tau).$$

Обозначив $\kappa_i = r_i\Lambda^i E_i$. уравнения для функциий $\Phi_1^{(i)}(x,\tau)$ перепишем в виде $\frac{\partial\Phi_1^{(i)}(x,\tau)}{\partial\tau} = jx\kappa_i\Phi_1^{(i)}(x,\tau)$, решения которых, удовлетворяющие начальным условиям $\Phi_1^{(i)}(x,0) = 1$ в силу (10), имеют вид

$$\Phi_1^{(i)}(x,\tau) = e^{jx\kappa_i\tau}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим равенства (16). □

В силу замен (14) и равенств (16) можно записать $F^i(u,t) = F_1^{(i)}(x,\tau,\varepsilon) = c_i r_i e^{jx\kappa_i\tau} + O(\varepsilon) = c_i r_i e^{ju\kappa_i t} + O(\varepsilon)$.

С учетом (7) $H(u,t) = F(u,t) + O(\delta)$. Для безусловной характеристической функции $Me^{jum(t)}$ величины $m(t)$ можно записать асимптотическое равенство $Me^{jum(t)} = H(u,t)E = \sum_{i=1}^m F^{(i)}(u,t) = \sum_{i=1}^m c_i r_i e^{ju\kappa_i t}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено асимптотическое распределение вероятностей числа событий, наступивших в потоке за время t. Данное распределение является смесью нормальныйх распределений с математическими ожиданиями $\kappa_i t$ и нулевыми дисперсиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: Учебное пособие. Томск: изд. НТЛ, 2006.– 204 с.
2. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания.– М.: Наука, 1987.– 336 с.
3. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: изд. НТЛ, 2006.– 112 с.
4. *Лопухова С.В., Назаров А.А.* Исследование рекуррентного потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.– 2007.– С. 67-76.