ИЗУЧЕНИЕ ПОТОКА МАШИН

М. Федоткин*, А. Федоткин

Нижегородский государственный университет

Нижний Новгород, Россия

* fma5@rambler.ru

Математической теории транспортных потоков посвящено большое число работ. В частности, материалы некоторых из этих работ широко заимствованы в монографиях [1 - 3]. Следует заметить, что транспортный поток машин существенно отличается от потока случайных событий, который рассматривается в классической теории массового обслуживания. Для транспортного потока важно изучить не только вероятностные свойства последовательности из моментов пересечения машинами так называемой виртуальной стоп-линии, но также необходимо определить свойства случайного расположения автомобилей на автомагистрали. В этой работе впервые рассматривается теория транспортных потоков, которая учитывает как пространственный, так и временной процесс.

Ключевые слова: транспортный поток, поток Пуассона, поток Бартлетта, бесконечная система дифференциальных уравнений, предельное распределение.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ТРАНСПОРТНОЙ ПАЧКИ

При удовлетворительном состоянии дорожного полотна и хороших метеорологических условиях движение автомобилей по магистрали может оказаться беспрепятственным и пуассоновским. При плохих погодных условиях (туман, снег, гололед и т. д.) обгон быстрыми машинами медленных является уже рискованным, зависимым и занимает значительное время. В этом случае на интенсивных магистралях будут возникать автоколонны (группы) машин или транспортные пачки, т. е. транспортные потоки уже не будут пуассоновскими. С такой ситуацией впервые столкнулся в 1963 году Бартлетт [4] при наблюдении за движением машин вблизи Лондона. Для такого типа транспортного потока Бартлетту и другим исследователям не удалось найти подходящего закона распределения для зависимых промежутков времени между двумя последовательными пересечениями автомобилями виртуальной стоп-линии. Один из авторов данной работы приблизительно в это же время решал задачу об оптимальном управлении транспортными потоками в городе Горьком (Нижний Новгород). По наблюдениям за движением машин на магистралях вблизи Горького и других крупных городов было подмечено, что транспортная пачка состоит из головной машины с медленным движением и очереди из быстрых машин, которые догнали медленную и ожидают возможности обгона. Здесь возникает проблема построения модели пространственного расположения машин на магистрали. С этой целью был предложен простой механизм образования транспортных пачек при интенсивном движении машин в плохих погодных условиях. Для большого числа магистралей оказалось, что быстрые машины поступают в транспортную пачку или, другими словами, догоняют медленную машину по закону Пуассона с интенсивностью $\lambda > 0$. Это означает, что быстрые машины осуществляют относительно свободное движение на протяжённых участках дороги, где нет медленных машин. Подробно такой транспортный поток был изучен в задаче о свободном движении автомобилей по магистрали [1]. Если $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}(\cdot))$ — основное вероятностное пространство, то далее через ω обозначим произвольный элемент достоверного события Ω. В некоторых случаях символ ω будем опускать. В соответствии с этой задачей обозначим через $\xi(\omega; t)$ случайное число быстрых машин, которые поступают по закону Пуассона в транспортную пачку за промежуток времени $[0, t)$.

Каждую машину с медленным движением можно интерпретировать как обслуживающий прибор для машин с быстрым движением. При этом под временем обслуживания, естественно, понимается случайное время обгона. На практике среднее время обслуживания (обгона) существенно зависит от числа машин в транспортной пачке. Пусть случайная величина $\chi(\omega; t)$ измеряет число всех типов машин в транспортной пачке в момент времени $t \geq 0$. Обозначим теперь через $\eta(\omega; t, \Delta t)$ случайное число быстрых машин, которые могу обогнать медленную за промежуток времени $[t, t+\Delta t)$. Вполне естественно предположить, что при малых значениях $\Delta t > 0$ условные вероятности событий, которые порождаются дискретной случайной величиной $\eta(\omega; t, \Delta t)$, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{P}(\{\omega : \eta(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = 2\}) = 1 - \mu_1 \Delta t + o(\Delta t), \\
\boldsymbol{P}(\{\omega : \eta(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = 2\}) = \mu_1 \Delta t + o(\Delta t), \\
\boldsymbol{P}(\{\omega : \eta(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = m\}) = 1 - \mu_2 \Delta t + o(\Delta t), \\
\boldsymbol{P}(\{\omega : \eta(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = m\}) = \mu_2 \Delta t + o(\Delta t), m = 3, 4, \ldots
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь и далее $o(\Delta t)$ есть бесконечно малая неотрицательная величина по сравнению с Δt при $t \to 0$. В равенствах (1) параметр μ_1^{-1} задает среднее время обгона каждой быстрой машиной медленную в случае, когда транспортная пачка состоит из двух машин. Аналогично параметр μ_2^{-1} в равенствах (1) определяет среднее время обгона каждой быстрой машиной медленную, если транспортная пачка состоит из трёх, четырёх, ... машин. Параметр μ_2 будем называть интенсивностью обгона. Таким способом моделируется зависимость среднего времени обгона от числа машин в транспортной пачке. Напомним, что пуассоновский процесс $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ обладает следующими свойствами:

1) при малом значении $\Delta t > 0$ вероятность $\boldsymbol{P}(\{\omega : \xi(t + \Delta t) - \xi(t) = 0\}) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ и вероятность $\boldsymbol{P}(\{\omega : \xi(t + \Delta t) - \xi(t) = 1\}) = \lambda \Delta t - o(\Delta t)$, где $t \geq 0$, λ — положительная константа;
2) при $t_2 > t_1 \geq 0$ вероятность $\boldsymbol{P}(\{\omega : \xi(t_2) - \xi(t_1) = m\})$ не зависит от t_1 и t_2, а зависит только от разности $t_2 - t_1$ и m, т. е. $\boldsymbol{P}(\{\omega : \xi(t_2) - \xi(t_1) = m\}) = \boldsymbol{P}(\{\omega : \xi(t_2 - t_1) = m\})$ для всех $m \geq 0$.

Так как $\sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{P}(\{\omega : \xi(t+\Delta t) - \xi(t) = m\}) = 1$ при $t \geq 0$ и $\Delta t > 0$, то из условия 1) и 2) вытекает, что $\boldsymbol{P}(\{\omega : \xi(t+\Delta t) - \xi(t) \geq 2\}) = \boldsymbol{P}(\{\omega : \xi(\Delta t) \geq 2\}) = o(\Delta t)$. Отсюда для свободного движения быстрых машин по магистрали следует, что при малом $\Delta t > 0$

$$\boldsymbol{P}(\{\omega : \eta(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = 1\}) = 1 - o(\Delta t). \tag{2}$$

Вероятности в (1) и (2) не зависят от времени t. Поэтому в дальнейшем ради упрощения записи будем опускать символ t и обозначать величину $\eta(\omega; t, \Delta t)$ через $\eta(\omega; \Delta t)$. Из этого соглашения и соотношений (1), (2), используя при любом фиксированном $m \geq 1$ условие нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}(\{\omega : \eta(\omega; \Delta t) = k\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = m\}) = 1$ при $t \geq 0$ и $\Delta t > 0$, получаем при малых значениях $\Delta t > 0$ соотношение

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P}(\{\omega : \eta(\omega; \Delta t) = 1\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = 1\}) = o(\Delta t), \\ \boldsymbol{P}(\{\omega : \eta(\omega; \Delta t) \geq 2\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = m\}) = o(\Delta t), m \geq 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Каждое из равенств (3), исключая первое, можно проинтерпретировать следующим образом. При заданном размере транспортной пачки условная вероятность того, что за (где угодно расположенный) промежуток Δt по меньшей мере две машины обгонят медленную, есть величина бесконечно малая по сравнению с Δt. Обозначим теперь через $Q(t, m)$ вероятность $\boldsymbol{P}(\{\omega : \chi(\omega; t) = m\})$ при фиксированных $\Delta t \geq 0$ и $m = 1, 2, \ldots$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые обычно используются в теории массового обслуживания, мы можем получить бесконечную систему дифференциальных уравнений для вероятностей вида $Q(t, m)$, $t \geq 0$, $m = 1, 2, \ldots$ В самом деле, при каждом $m = 1, 2, \ldots$ равенство в событиях $\{\omega : \chi(\omega; t + \Delta t) = m\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\omega : \chi(\omega; \Delta t) = k, \xi(\omega; \Delta t) = n, \eta(\omega; \Delta t) = k + n - m\}$ и формулы (1) — (3) позволяют написать равенства: $Q(t + \Delta t, 1) = (1 - \lambda \Delta t) Q(t, 1) + Q(t, 2) \mu_1 \Delta t + o(\Delta t)$, $Q(t + \Delta t, 2) = \lambda \Delta t Q(t, 1) + (1 - (\lambda + \mu_1) \Delta t) Q(t, 2) + Q(t, 3) \mu_2 \Delta t + o(\Delta t)$, $Q(t + \Delta t, m) =$ $= \lambda \Delta t Q(t, m-1) + (1 - (\lambda + \mu_2) \Delta t) Q(t, m) + Q(t, m+1) \mu_2 \Delta t + o(\Delta t), m = 3, 4, \ldots$ Отсюда при $\Delta t \to 0$ получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} dQ(t, 1)/dt = -\lambda Q(t, 1) + \mu_1 Q(t, 2), \\ dQ(t, 2)/dt = \lambda Q(t, 1) - (\lambda + \mu_1) Q(t, 2) + \mu_2 Q(t, 3), \\ dQ(t, m)/dt = \lambda Q(t, m-1) - (\lambda + \mu_2) Q(t, m) + \mu_2 Q(t, m+1), m \geq 3. \end{gathered} \tag{4}$$

Будем дополнительно предполагать, что в момент $t = 0$ число машин в транспортной пачке равно i. Тогда динамика распределения числа машин в транспортной пачке определяется решением системы дифференциальных уравнений (4) с начальными условиями $Q(0, i) = 1$, $Q(0, m) = 0$ при $m \geq 1$ и $m \neq i$.

Явное решение системы дифференциальных уравнений (4) может быть найдено с помощью вывода и последующего решения дифференциального уравнения в частных производных для производящей функции вида $\Pi_{\chi(t)}(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m Q(t,m)$, как это делается в большинстве задач теории массового обслуживания. Однако в этом случае процесс решения является очень громоздким и далеко нетривиальным. К счастью, нам потребуется здесь только свойства распределения числа машин в транспортной пачке при $t \to \infty$, т. е. некоторые свойства решений системы (4) при $t \to \infty$. Общие свойства решений такого рода систем дифференциальных уравнений детально изучены в работах Колмогорова, Феллера, Ледермана, Карлина, Кларка, Мак-Грегора, Рейтера, Федоткина. В частности, если $\lambda < \mu_2$, то существует единственное решение системы уравнений (4) и оно удовлетворяет при $m = 1, 2, \ldots$ условиям вида: $\sum_{m=1}^{\infty} Q(t,m) = 1$, $\lim_{t\to\infty} Q(t,m) = Q(m) > 0$, $\sum_{m=1}^{\infty} Q(m) = 1$. При этом указанные пределы не зависят от начальных условий и могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
0 = -\lambda Q(1) + \mu_1 Q(2), 0 = \lambda Q(1) - (\lambda + \mu_1) Q(2) + \mu_2 Q(3), \\
0 = \lambda Q(m-1) - (\lambda + \mu_2) Q(m) + \mu_2 Q(m+1), m = 3, 4, \ldots
\end{gathered} \tag{5}$$

Распределение $\{Q(m); m = 1, 2, \ldots\}$ называется предельным или эргодическим для числа $\chi(\omega)$ всех типов машин в транспортной пачке. Это распределение характеризует так называемый установившийся или стационарный режим движения автоколонн по магистрали. На содержательном уровне условие $\lambda < \mu_2$ означает, что интенсивность, с которой быстрые машины догоняют медленную, должна быть меньше интенсивности обгона. При $\lambda < \mu_2$ система (5) получается с помощью предельного перехода при $t \to \infty$ одновременно во всех уравнениях системы (4) с учётом равенств $\lim_{t\to\infty}(dQ(t,m)/dt) = 0$, $\lim_{t\to\infty} Q(t,m) = Q(m)$, $m \geq 1$. Отметим, что при каждом фиксированном $m \geq 1$ предел $\lim_{t\to\infty}(dQ(t,m)/dt)$ существует. Более того, каждый такой предел равен нулю. В противном случае модуль величины $Q(t,m)$ при $t \to \infty$ возрастал бы неограниченно, что невозможно в силу смысла величины $Q(t,m)$ как вероятности. Перейдём теперь к решению системы (5).

Пусть теперь при $m = 2, 3, \ldots$ величина $u_m = -\lambda Q(m) + \mu_2 Q(m+1)$. Из первых двух уравнений системы (5) легко получим, что $Q(2) = \lambda\mu_1^{-1}Q(1)$ и $Q(3) = \lambda^2\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}Q(1)$. Поэтому $u_2 = -\lambda Q(2) + \mu_2 Q(3) = 0$. Используя все равенства системы (5) за исключением первых двух, найдём $u_m - u_{m-1} = 0, m \geq 3$. Отсюда вытекает, что $u_m = 0$ для всех $m \geq 2$. Значит, для каждого фиксированного $m \geq 2$ вероятность $Q(m) = \lambda\mu_1^{-1}(\lambda\mu_2^{-1})^{m-2}Q(1)$. Учитывая условие нормировки $\sum_{m=1}^{\infty} Q(m) = 1$ и неравенство $\lambda < \mu_2$, окончательно получим:

$$\begin{gathered}
Q(1) = \mu_1(\mu_2 - \lambda)(\mu_1\mu_2 + \lambda\mu_2 - \lambda\mu_1)^{-1}, \\
Q(m) = \lambda(\mu_2 - \lambda)(\mu_1\mu_2 + \lambda\mu_2 - \lambda\mu_1)^{-1}(\lambda\mu_2^{-1})^{m-2}, m \geq 2.
\end{gathered} \tag{6}$$

Сравнивая распределение Бартлетта из [5] и формулы (6), придём к соотношениям:

$$r = \lambda\mu_2(\mu_1\mu_2 + \lambda\mu_2 - \lambda\mu_1)^{-1}, q = \lambda\mu_2^{-1}. \quad (7)$$

Итак, доказано, что распределение числа $\chi(\omega)$ всех типов машин в транспортной пачке для стационарного режима является распределением Бартлетта. Для распределения Бартлетта функция $\Pi_\chi(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m Q(m) = r(1-q)(1-qz)^{-1}z^2 + (1-r)z$. Отсюда для величины Бартлетта вычисляем математическое ожидание $M\chi(\omega) = 1 + r(1-q)^{-1}$, дисперсию $D\chi(\omega) = r(1+q-r)(1-q)^{-2}$, коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}\chi(\omega) = (2r^2 3(1+q)r + q^2 + 4q + 1)(1+q-r)^{-3/2}r^{-1/2}$ и эксцесс $\text{Э}\chi(\omega) = r^{-1}(1+q-r)^{-2}(-6r^3 + 12r^2(q+1) - r(7q^2 + 22q + 7) + q^3 + 11q^2 + 11q + 1)$. Вид формулы (3) из [5] и формул (6), (7) позволяет дать следующий простой смысл параметров r и q для задачи о групповом движении машин по магистрали. Параметр r определяет вероятность появления транспортной пачки из быстрых машин для стационарного режима. Параметр q задает степень насыщения транспортной магистрали быстрыми машинами и его можно назвать коэффициентом заполнения или загрузкой транспортной магистрали. В самом деле, если $\mu_2 > \lambda$ и $\mu_2 \to \lambda$, то из (7) легко выводим, что параметры $r \to 1, q \to 1$. Поэтому при $\mu_2 > \lambda$ и $\mu_2 \to \lambda$ математическое ожидание $r(1-q)^{-1} + 1$ числа всех типов машин в транспортной пачке для стационарного режима растёт неограниченно. Это обстоятельство постоянно наблюдают автомобилисты при существенном ухудшении погодных условий, когда на дорогах образуются транспортные заторы значительной протяжённости. Теперь можно сделать одно важное замечание. Легко видеть, что при $r = q$ распределение Бартлетта совпадает с геометрическим распределением. Из (7) находим, что это возможно только при $\mu_2(\mu_1\mu_2 + \lambda\mu_2 - \lambda\mu_1)^{-1} = \mu_2^{-1}$. Отсюда получаем $\mu_2^2 - (\mu_1 + \lambda)\mu_2 + \lambda\mu_1 = 0$ или $(\mu_2 - \lambda)(\mu_2 - \mu_1) = 0$. Так как $\mu_2 > \lambda$, то только при $\mu_2 = \mu_1$ предельное распределение числа всех типов машин в транспортной пачке является геометрическим. Другими словами, если среднее время обгона каждой быстрой машиной медленную не зависит от числа машин в транспортной пачке, то мы имеем дело с геометрическим законом распределения.

2. СВОЙСТВА ПОТОКА БАРТЛЕТТА

В реальном транспортном потоке плотность медленных машин (число медленных машин на единичном по длине участке автомагистрали) значительно меньше плотности быстрых. В тоже время можно допустить, что движение медленных машин в стационарном режиме происходит независимым образом. В связи с этим можно предположить, что транспортный поток из медленных машин в стационарном режиме будет пуассоновским с интенсивностью μ. Пусть максимальная длина участка дороги, на котором располагается среднее число $1 + r(1-q)^{-1}$ автомобилей в транспортной пачке, много меньше среднего расстояния между соседними автомобилями с медленным движением. Тогда можно считать, что все машины каждой движущейся автоколонны в стационарном режиме пересекают некоторую поперечную линию автомагистрали одновременно. Такой транспортный поток движущихся в стационарном режиме автомобилей на магистрали будем называть потоком Бартлетта. Для потока Бартлетта обозначим теперь через $\text{æ}(\omega; t)$ случайное число всех типов машин, которые пересекают фиксированную поперечную линию автомагистрали за промежуток времени $[0, t)$. Для величины $\text{æ}(\omega; t)$ введём производящую функцию $\Pi_{\text{æ}(t)}(t, z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} z^m \boldsymbol{P}(\{\omega : \text{æ}(\omega; t) = m\})$. Имеет место

Теорема 1. *Для функции* $\Pi_{\text{æ}(t)}(t, z)$ *справедливо равенство* $\Pi_{\text{æ}(t)}(t, z) = e^{-\mu t} \times$ $\times \sum\limits_{m=0}^{\infty} z^m \left\{ \frac{(\mu t(1-r))^m}{m!} + \sum\limits_{k=0}^{m-2} \frac{(\mu t(1-r))^k}{k!} \sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]} \frac{(\mu t r(1-q))^j}{j!} C_{m-k-j-1}^{j-1} q^{m-k-2j} \right\}$, *где через* $\left[\frac{m-k}{2}\right]$ *обозначена целая часть числа* $\frac{m-k}{2}$.

Из теоремы следует, что поток Бартлетта определяется параметрами μ, r и q.

Теорема 2. *Для одномерного распределения* $\boldsymbol{P}(\{\omega : \text{æ}(\omega; t) = m\})$, $m \geq 0$ *потока Бартлетта* $\{\text{æ}(\omega; t) : t \geq 0\}$ *справедливы равенства* $\boldsymbol{P}(\{\omega : \text{æ}(\omega; t) = 0\}) =$ $= e^{-\mu t}$, $\boldsymbol{P}(\{\omega : \text{æ}(\omega; t) = 1\}) = \mu t(1-r)e^{-\mu t}$, $\boldsymbol{P}(\{\omega : \text{æ}(\omega; t) = m\}) = e^{-\mu t} \times$

$$\times \left\{ \frac{(\mu t(1-r))^m}{m!} + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(\mu t(1-r))^k}{k!} \sum_{j=1}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]} \frac{(\mu t r(1-q))^j}{j!} C_{m-k-j-1}^{j-1} q^{m-k-2j} \right\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $M\text{æ}(\omega; t)$ *и* $D\text{æ}(\omega; t)$ *суть математическое ожидание и дисперсия* $\text{æ}(\omega; t)$. *Тогда* $M\text{æ}(\omega; t) = \mu t \left(1 + \frac{r}{1-q}\right)$, $D\text{æ}(\omega; t) = \mu t \left(1 + \frac{r}{1-q} + \frac{2r}{(1-q)^2}\right)$.

Лемма 2. *Для того чтобы сумма* n *независимых потоков Бартлетта с параметрами* μ_i, r_i *и* q_i, $i = \overline{1, n}$, *являлась потоком Бартлетта, необходимо и достаточно, чтобы* $q_1 = q_2 = \cdots = q_n$. *При этом суммарный поток будет иметь параметры* $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i$, $r = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i r_i / \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i$ *и* $q = q_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haight F. A.* Mathematical theories of traffic flow. New York London: Academic press, 1963.
2. *Drew D. R.* Traffic flow theory and control. New York: McGraw-Hill, 1968.
3. *Inose H., Hamada T.* Road traffic control. Tokyo: University of Tokyo press, 1975.
4. *Bartlett M. S.* The spectral analysis of point processes // J. R. Statist. Soc. B. 1963. V. 25. № 2. P. 264–296.
5. *Fedotkin A. M., Fedotkin M. A.* Model for refusals of elements of a controlling system // Transactions of the first French-Russian Conference on "Longevity, Aging and Degradation Models in Reliability, Public Health, Medicine and Biology, LAD' 2004". Saint Petersburg: St. Petersburgs SPU, 2004. V. 2. P. 136–151.