ОТКРЫТАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ЗАЯВОК И БЛОКИРОВКОЙ СИСТЕМ

Ю. Боярович
ГГУ им. Ф. Скорины
Гомель, Беларусь
juls1982@list.ru

Исследуется открытая сеть массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием заявок. Обслуженные группы покидают узел и переходят на другой с возможным изменением размера. Устанавливается зависимость процесса обслуживания от процесса поступления заявок. Результатом исследования является вид, а также необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения.

Ключевые слова: открытая сеть массового обслуживания, процессы поступления и обслуживания, блокировка системы массового обслуживания, групповые перемещения заявок, стационарное распределение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы все больше уделяется внимания исследованию сетей массового обслуживания с групповыми перемещениями заявок. Действительно, результаты, полученные для таких моделей могут иметь широкое применение на практике. Например, многие виды транспорта обслуживают клиентов группами случайного размера. При исследование таких моделей, как правило, возникают значительные технические трудности, поэтому приходится накладывать ряд ограничений. В настоящей работе нами рассмотрена "блокировка"(остановка работы) обслущивающих систем на некоторое случайное время, благодаря чему значительно упростился процесс поиска стационарного распределения. Процесс "блокировки однако, приводит к необходимости вводить определенные ограничения на процессы поступления и обслуживания. В нашем случае мы рассмотрим зависимость процесса обслуживания от процесса поступления групп заявок.

2. МОДЕЛЬ ОДНОЛИНЕЙНОГО УЗА

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием. Поток групп - пуассоновский с интенсивностью λ. Обслуживание - экспоненциальное с интенсивностью μ. На обслуживание выбирается из очереди группа заявок. Если выбранный на обслуживание размер группы превышает количество заявок в очереди, то выбранная группа (назовем ее *некомплектной*) обслуживается, но по окончании обслуживания возвращается на исходный узел, что эквивалентно тому, что прибор "блокируется"на среднее время обслуживания одной группы $\frac{1}{\mu}$. Пусть Y_i — размер i-й поступающей в систему группы, а Z_i — размер i-й группы, требующей обслуживания. Предполагаем, что $\{Y_i\}$, $\{Z_i\}$ - неотрицательные целочисленные случайные величины с функциями распределения A и B, функциями вероятностных масс a и b и производящими функциями $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ соответственно. Причем при описании модели B, b, $\tilde{B}$ носят характер переменных величин и будут впоследствии вычислены в зависимости от A, a, $\tilde{A}$. Пусть $X(t)$ — количество заявок в системе в момент времени t. Тогда $\{X(t)\}$ - цепь Маркова с непрерывным временем с пространством состояний $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$. Интенсивности перехода для такой цепи:

$$q(n, n+k) = \lambda a(k) \qquad (k \geq 1,\ n \geq 0),$$

$$q(n, n-k) = \mu b(k) \qquad (n \geq k \geq 1),$$

$$q(n, n) = \mu \bar{B}(n+1) \qquad (n \geq 1),$$

где $\bar{B}(n) = 1 - B(n-1) = 1 - b(1) - \ldots - b(n-1)$.

Для простоты будем предполагать, что наибольший общий делитель тех k, для которых $a(k)b(k) > 0$ равен 1. Тогда, очевидно, цепь Маркова $\{X(t)\}$ неприводима.

В предположении, что стационарное распределение π цепи Маркова $\{X(t)\}$ существует и является геометрическим, т.е. $\pi(n) = (1-c)c^n$, здесь $0 < c < 1$, а также применяя метод обращения времени, для вышеописанной модели однолинейного узла были получены следующие результаты.

Параметр c является решением следующего уравнения:

$$\tilde{A}\Big(\frac{1}{c}\Big) = \frac{\mu}{\lambda}. \tag{1}$$

Процессы поступления и обслуживания связаны равенством:

$$\tilde{B}(cz) = \frac{\lambda}{\mu}\tilde{A}(z), \tag{2}$$

Из приведенных соотношений можно получить следующее:

$$c^m = \frac{\lambda\, a(m)}{\mu\, b(m)},\ m = 1, 2, ..., \tag{3}$$

которое превращается при $m = 1$ в

$$c = \frac{\lambda\, a(1)}{\mu\, b(1)}.$$

Отметим, что при описании модели мы будем задавать определенный вид для функции $\tilde{A}(z)$ и при помощи соотношений (2) или (3) устанавливать вид функции $\tilde{B}(z)$. Продемонстрируем это на конкретном примере.

Рассмотрим случай, когда $\tilde{A}(z) = \frac{(1-a)z}{1-az}$, тогда $\tilde{A}(\frac{1}{c}) = \frac{\mu}{\lambda}$, откуда находим корень: $c = \frac{(1-a)\lambda+\mu a}{\mu}$. Теперь устанавливаем параметры обслуживания. И учитывая, что $\tilde{B}(cz) = \frac{\lambda(1-a)z}{\mu(1-az)} = \frac{(c-a)z}{1-az} = \frac{(1-\frac{a}{c})z}{1-\frac{a}{c}z}$, легко находится вид функции $\tilde{B}(z)$. Действительно, $\tilde{B}(z) = \frac{(1-b)z}{1-bz}$, где $b = \frac{a}{c}$.

Лемма 1. *Для того, чтобы уравнение* (1) *имело корень* $c \in (0,1)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\lambda < \mu. \tag{4}$$

Этот корень при фиксированных λ *и* μ *единственный.*

Доказательство. Действительно, нетрудно видеть, что левая часть (1) - абсолютно монотонная (убывающая) функция, причем строго положительная, которая в единице принимает значение 1. Таким образом очевидно, что при $\frac{\mu}{\lambda} > 1$ уравнение (1) имеет корень $c \in (0,1)$. Причем этот корень при фиксированных λ и μ единственный. □

Лемма 2. *Условие* (4) *- условие эргодичности для марковского процесса* $X(t)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы* $\{\pi(n) = (1-c)c^n, \quad n = 0,1,\ldots\}$ *являлось стационарным распределением* $X(t)$, *необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности* (4), *процессы поступления и обслуживания должны подчиняться закономерности* (2), *а* $c \in (0,1)$ *- корень уравнения* (1). *Причем с интенсивностями перехода, определенными выше, рассмотренный однолинейный узел является квазиобратимым.*

3. МОДЕЛЬ СЕТИ

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания с конечным множеством узлов $J = \{1,2,\ldots,N\}$. В узлы сети поступают независимые пуассоновские потоки групп заявок с параметрами λ_i для узла $i \in J$. Длительности обслуживания групп в узлах имеют показательное распределение с параметрами μ_i для узла $i \in J$. Размеры поступающих и требуемых для обслуживания групп — положительные целочисленные случайные величины с функциями распределения A_i и B_i, функциями вероятностных масс a_i и b_i, а также производящими функциями $\tilde{A}_i$ и $\tilde{B}_i$ соответственно для узла $i \in J$. Причем, как и для случая модели однолинейного узла детерминированный характер носят лишь функции A_i, a_i, $\tilde{A}_i$, $i \in J$, а функции B_i, b_i и $\tilde{B}_i$, $i \in J$ от них зависят. Обслуженная в узле i группа, достигшая требуемого размера (назовем их *комплектными*), переходит с вероятностью $p_{i,(j,m)}$ в узел j как группа размера m, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть. Неполные группы, не достигшие требуемого размера (*некомплектные*) также обслуживаются, но после обслуживания возвращаются на узел, на котором были обслужены, таким образом видим, что описанная сеть эквивалентна сети, состоящей из систем, использующих "блокировку"в случае, когда размер группы, выбранной на обслуживание превышает количество заявок в узле. Пусть $c_{i,j}(k,m) = b_i(k)p_{i,(j,m)}, \quad c_{i,0}(k) = b_i(k)p_{i,0}$, если $i,j \in J$. Для простоты предположим, что для комплектных групп $c_{i,i}(k,m) = 0$ для всех $i \in J, \quad k,m \geq 1$. Допустим также, что маршрутная матрица $R = \{r_{i,j}\}_{i,j \in J \cup \{0\}}$ будет неприводима. Пусть теперь $X_i(t)$ — число заявок в узле i в момент t. Состояние сети будем описывать цепью Маркова $\{\boldsymbol{X}(t)\}$ с непрерывным временем и пространством состояний $\mathbb{Z}_+^N$, где $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_N(t))$. Обозначим через q функцию интенсивностей перехода для этой цепи. Остальные обозначения будут такими же как для модели однолинейного узла в разделе 2, но с дополнительным индексом i, указывающим номер узла из множества J. Интенсивности перехода для рассматриваемой модели:

$$q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} - k\boldsymbol{e}_i + m\boldsymbol{e}_j) = \mu_i b_i(k) p_{i,(j,m)}, \qquad 1 \leq k \leq n_i,\ 1 \leq m,$$

$$q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} - k\boldsymbol{e}_i) = \mu_i b_i(k) p_{i,0}, \qquad 1 \leq k \leq n_i,$$

$$q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} + m\boldsymbol{e}_j) = \lambda_j a_j(m), \qquad 1 \leq m,$$

$$q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = \sum_{i \in J_+(\boldsymbol{n})} \mu_i \bar{B}_i(n+1), \qquad 1 \leq n,$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — единичный вектор, i-я координата которого равна 1, $\bar{B}_i(n) = 1 - B_i(n-1)$, а также $J_0(\boldsymbol{n}) = \{i \in J : \ n_i = 0\}$ и $J_+(\boldsymbol{n}) = J \setminus J_0(\boldsymbol{n})$. Предположим, что π имеет геометрическую форму произведения, т.е.

$$\pi(\boldsymbol{n}) = \prod_{i=1}^{N} (1 - c_i) c_i^{n_i}, \qquad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Обозначим через $\gamma_j(m)$ - поток комплектных групп размера m на узел j. Тогда:

$$\gamma_j(m) = \lambda_j a_j(m) + \sum_{i \in J} \mu_i \sum_{k=1}^{\infty} c_i^k c_{i,j}(k, m), \qquad j \in J. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{\Gamma}_i(z_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m) z_i^m, \qquad i \in J.$$

При этом $\tilde{\Gamma}_i(1) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_i(m)$ является интенсивностью потока комплектных групп на узел i, а $\tilde{\Gamma}_i^{-1}(1)\tilde{\Gamma}_i(z_i)$ производящей функцией распределения размеров комплектных групп, принимаемых узлом i. Применив подход, аналогичный случаю модели однолинейного узла для вышеописанной модели сети были получены следующие результаты.

Числа c_j, $j \in J$ являются корнями уравнений:

$$\tilde{\Gamma}_j\left(\frac{1}{c_j}\right) = \mu_j, \quad j \in J. \tag{6}$$

А процессы поступления комплектных групп заявок и процессы обслуживания связаны следующим равенством:

$$\tilde{\Gamma}_j(z_j) = \mu_j \bar{B}(c_j z_j), \quad j \in J, \tag{7}$$

Причем справедливо также соотношение:

$$c_j^m = \frac{\gamma_j(m)}{\mu_j b_j(m)}, \quad j \in J, m \geq 1. \tag{8}$$

Лемма 3. *Для того, чтобы при всех $j \in J$ уравнения (6) имели корни $c_j \in (0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\bar{\Gamma}_j(1) < \mu_j, \quad j \in J. \tag{9}$$

Эти корни при фиксированных $\bar{\Gamma}_j(1)$ и μ_j единственные. Причем условие (9) является и условием эргодичности.

Заметим, что аналогично случаю модели однолинейного узла можно показать, что условие (9) является также необходимым и достаточным условием существования корней уравнений (6), принадлежащих промежутку (0;1).

Таким образом, равно как и в случае модели однолинейного узла, установлено, что процессы поступления и обслуживания зависят друг от друга.

Теорема 2. *Для того, чтобы $\{\pi(\boldsymbol{n}) = \prod_{j \in J}(1-c_j)c_j^{n_j}, \ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}_+^N\}$ являлось стационарным распределением $\boldsymbol{X}(t)$, необходимо и достаточно выполнения условия эргодичности (9), процессы поступления и обслуживания должны подчиняться закономерности (7), а c_j — корни уравнений (6), принадлежащие (0,1).*

4. АЛГОРИТМ ПОИСКА СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Заметим, что для $\gamma_j(m)$, $m \geq 1$, $j \in J$ справедливы соотношения:

$$\gamma_j(m) = \lambda_j a_j(m) + \sum_{i \in J} \gamma_i p_{i,(j,m)}, \quad j \in J, \ m \geq 1. \tag{10}$$

Проведя теперь в (10) суммирование по $m \geq 1$, видим, что для описанной модели имеет место следующая система уравнений трафика:

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_{i \in J} \gamma_i \sum_{m=1}^{\infty} p_{i,(j,m)}, \quad j \in J, \tag{11}$$

Заметим также, что система (11) имеет единственное нетривиальное решение, поскольку матрица маршрутизации $R = \{r_{i,j}\}_{i,j \in J \cup \{0\}}$ неприводима.

Таким образом, установлены следующие этапы проверки существования и поиска стационарного распределения рассмотренной сети массового обслуживания:

1) Находим корни γ_j, $j \in J$ уравнений (11).
2) Проверяем выполнение условия эргодичности (9). При его выполнении переходим к следующему пункту алгоритма. Иначе делаем вывод, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения.

3) Зная вероятности $a_j(m)$, $j \in J$, $m \geq 1$ и применяя (10), находим значения $\gamma_j(m)$, $j \in J$, $m \geq 1$.
4) Находим корни $c_j \in (0; 1)$, $j \in J$ уравнений (6).
5) Теперь при помощи (7) или (8) устанавливаем вид функций $\bar{B}_j(z_j)$, $j \in J$, характеризующих процесс обслуживания групп заявок.
6) Находим вид стационарного распределения: $\{\pi(n) = \prod_{j \in J}(1 - c_j)c_j^{n_j}, \ n \in \mathbb{Z}_+^N\}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована работа открытой сети массового обслуживания с групповыми перемещениями заявок. Благодаря рассмотрению вышеописанной "блокировки"прибора удалось при помощи метода обращения времени установить вид стационарного распределения. Применение "блокировки"позволило значительно упростить процесс исследования сети и поиска стационарного распределения. Однако, упрощая, с одной стороны, рассмотрение модели, приходится накладывать ряд ограничений на процесс обслуживания групп заявок. Несмотря на это, в целом, для описанной модели сети удалось построить довольно эффективный алгоритм поиска стационарного распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miyazawa M., Taylor P. G.* A Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-Standard Batch Arrivals and Batch Transfers // Adv. Appl. Prob., 1997. V. 29. P. 523–534.
2. *Malinkovsky Y., Bojarovich J.* Geometric product form stationary distribution for queueing networks with batch movements of positive and negative customers // Queues: flows, systems, networks: conf. proc. “Mathematical Methods for Increasing Efficiency of Information Telecommunication Networks”, 2007. P. 128–133.
3. *Chao X., Pinedo M., Shaw D.* A Network of Assembly Queues with Product-form Solution // Adv. Appl. Prob., 1996. № 2. V. 33. P. 858–869.