

СЛОЖНОСТЬ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАЗБИЕНИИ ВЕРШИН ГРАФА НА ЦЕПИ ОДИНАКОВОЙ ДЛИНЫ

А. Б. Жиркевич

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуется вычислительная сложность задачи о разбиении множества вершин графа на простые цепи фиксированной длины k в специальных классах графов.

Рассматриваются только конечные неориентированные графы $G = (V, E)$ без кратных рёбер и петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Используются стандартные теоретико-графовая (см., например, [1]) и теоретико-сложностная терминология (см., например, [2]).

Пусть k – произвольное натуральное число, $k \geq 2$ и $G = (V, E)$ – граф с числом вершин кратным k . P_k -разбиением вершин графа G называется такое разбиение множества вершин $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{|V|/k}$, что для каждого $i \in \{1, 2, \dots, |V|/k\}$ выполняются следующие условия:

- 1) $|V_i| = k$;
- 2) подграф графа G , порождённый множеством вершин V_i , содержит (не обязательно порождённый) подграф, изоморфный простой цепи на k вершинах.

Отметим, что P_2 -разбиение вершин графа G – это совершенное паросочетание графа G .

Существуют графы, для которых имеет место P_k -разбиение вершин. Такими графами являются, например, гамильтоновы графы, в которых число вершин кратно k . Существуют графы, для которых нет P_k -разбиения вершин. Таким графом, например, является звезда $K_{1,2k-1}$. Естественным образом возникает задача распознавания наличия P_k -разбиения вершин графа:

P_k -РАЗБИЕНИЕ

Условие: задан граф $G = (V, E)$ с числом вершин кратным k ;

Вопрос: существует ли P_k -разбиение вершин графа G ?

Отметим, что эта задача является частным случаем более общей задачи – задачи F -РАЗБИЕНИЕ, которая формулируется следующим образом: задано семейство графов F и требуется выяснить существует ли F -разбиение вершин заданного графа $G = (V, E)$, где F -разбиение вершин графа G – это такое разбиение вершин $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, что для любого

$i \in \{1, 2, \dots, k\}$ подграф графа G , порождённый множеством V_i содержит хотя бы один из графов семейства F в качестве подграфа.

Известно, что задача P_k -РАЗБИЕНИЕ для любого фиксированного натурального числа $k > 2$ является NP-полной [3]. Более того, для любого $k \geq 3$ задача остаётся NP-полной для графов, обладающих специальными структурными свойствами: для двудольных планарных графов [4], двудольных графов с максимальной степенью вершин 3 [5].

РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [5] и её расширенной версии [6] Монно и Тулуз доказали, что задача P_k -РАЗБИЕНИЕ для $k = 3$ в классе планарных двудольных графов с максимальной степенью вершин 3 является NP-полной задачей и поставили вопрос: какова вычислительная сложность задачи в этом классе графов для $k > 3$? К настоящему моменту этот вопрос остаётся открытым.

Теорема 1. *Для любого фиксированного натурального числа $k > 3$, задача P_k -РАЗБИЕНИЕ в классе двудольных планарных графов с максимальной степенью вершин 3 является NP-полной задачей.*

Идея доказательства этого утверждения заключается в построении полиномиального сведения от NP-полной задачи P_k -РАЗБИЕНИЕ для планарных двудольных графов, используя локальные преобразования графа, уменьшающие степени вершин. Техника локальных преобразований графов, уменьшающих степени вершин, хорошо известна и широко применяется в доказательствах NP-полноты классических задач о независимости, доминировании и диссоциирующем множестве [7–9].

Напомним, что диаметром графа называется максимальное расстояние между двумя вершинами этого графа. Класс графов с диаметром не больше чем 1 совпадает с классом полных графов. Ясно, что в этом классе графов задача P_k -РАЗБИЕНИЕ решается за полиномиальное время. Следующая теорема даёт исчерпывающий ответ на вопрос о сложностном статусе рассматриваемой задачи в классе графов с диаметром ограниченным произвольной константой.

Теорема 2. *Для любых фиксированных натуральных чисел $k > 2$ и $d > 1$, задача P_k -РАЗБИЕНИЕ является NP-полной в классе графов с диаметром не больше чем d .*

Далее изучается сложность решения задачи P_k -РАЗБИЕНИЕ в наследственных классах графов.

Разработан полиномиальный алгоритм динамического программирования, который позволяет определить существует ли P_k -разбиение вершин заданного леса. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Для любого фиксированного натурального числа $k > 2$, задача P_k -РАЗБИЕНИЕ в классе лесов решается за полиномиальное время.

Теорема 4. Для любого фиксированного натурального числа $k > 2$, задача P_k -РАЗБИЕНИЕ в классе графов пересечения единичных интервалов решается за полиномиальное время.

Полиномиальный алгоритм решения задачи для графов пересечения единичных интервалов удалось разработать благодаря хорошо известной характеристизации графов пересечения единичных интервалов в терминах двусовместной сортировки вершин графа [10].

Теорема 5. Для любого фиксированного натурального числа k , $2 < k < 20$, задача P_k -РАЗБИЕНИЕ в классе двудольных перестановочных графов решается за полиномиальное время.

Ключевую роль при разработке полиномиального алгоритма для решения задачи в классе двудольных перестановочных графов сыграла характеристизация двудольных перестановочных графов в терминах сильного упорядочения вершин графа [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе установлена вычислительная сложность задачи о P_k -разбиении для различных значений параметра k в следующих широко изучаемых содержательных классах графов: леса, двудольные перестановочные графы, графы пересечения единичных интервалов, графы с диаметром ограниченным произвольной константой. Особый интерес представляет результат о полиномиальной разрешимости задачи о P_k -разбиении в классе двудольных перестановочных графов для любого фиксированного $k < 20$. Нам не удалось доказать аналогичный результат для любого фиксированного $k \geq 20$. На этом основании мы формулируем следующую гипотезу.

Гипотеза. Для любого фиксированного натурального числа k , $k \geq 20$, задача P_k -РАЗБИЕНИЕ в классе двудольных перестановочных графов решается за полиномиальное время.

Было бы также интересно усилить результат теоремы 1 и установить вычислительную сложность задачи о P_k -разбиении в классе двудольных планарных графов с максимальной степенью вершин 3 и произвольно большим обхватом. Кроме этого, интерес представляет установление вычислительной сложности рассматриваемой задачи в классах графов, содержащих графы пересечения единичных интервалов – графы, не содержащие звезду $K_{1,3}$ в качестве порождённого подграфа, и графы пересечения интервалов.

Литература

1. Емеличев В.А. [и др.]. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. Kirkpatrick D. G., Hell P. On the completeness of a generalized matching problem. // Proc of the tenth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM New York, NY, USA, 1978. P. 240–245.
4. Dyer M., Frieze A. On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs. // Discrete Applied Mathematics, 1985, №10. P. 139–153.
5. Monnot J., Toulouse S. The path partition problem and related problems in bipartite graphs // Operations Research Letters, 2007, №35. P. 677 – 684.
6. Monnot J., Toulouse S. Bounded-size path packing problems. / In Vangelis Th. Paschos, editor, Wiley, 2001. (Combinatorial Optimization and Theoretical Computer Science: Interfaces and Perspectives). P. 455–493
7. Korobitsyn D.V. Complexity of some problems on hereditary classes of graphs. // Discrete Mathematics and Applications, 1992, № 2. P. 191–199.
8. Alekseev V.E. On the local restrictions effect on the complexity of finding the graph independence number. // Combinatorial-Algebraic Methods in Applied Mathematics, 1983, P. 3–13.
9. Boliac R., Cameron K., Lozin V. On computing the dissociation number of bipartite graphs. // Ars Combinatoria, 2007, № 72. P. 241–253.
10. Panda B.S. A linear time recognition algorithm for proper interval graphs // Inform Proc Lett, 2003, № 87(3). P. 153–161.
11. Spinrad J. Bipartite permutation graphs // Discrete Applied Mathematics, 1987, № 18. P. 279–292.

РАЗРАБОТКА ТЕКСТОНЕЗАВИСИМОЙ СИСТЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИКТОРА НА ОСНОВЕ ФОНЕМНОГО РАЗБИЕНИЯ И GMM

В. В. Захарова

ВВЕДЕНИЕ

В связи с наращиванием потоков передачи речи по каналам связи, требующим аутентификации клиентов, задача идентификации человека по голосу является одной из востребованных сегодня задач распознавания образов. С точки зрения пользователя более удобна текстонезависимая идентификация, также она незаменима в случаях, когда факт идентификации необходимо скрыть. Но отказ от использования лингвистической информации ведет к снижению качества распознавания, так как невозможна тщательная калибровка входных лексем с помощью идентичного речевого материала [1]. В данной статье предлагается способ построения