

Рис. 3. Частота спайковой активности нейрона после длительного воздействия шумом

### Литература

1. Haider B. et al. Neocortical network activity in vivo is generated through a dynamic balance of excitation and inhibition //Journal of Neuroscience. 2006. V. 26. N. 17. P. 4535–4545.
2. Attwell D., Laughlin S. B. An energy budget for signaling in the grey matter of the brain // Journal of Cerebral Blood Flow. Metabolism. 2001. V. 21. N. 10. P. 1133–1145.
3. Barral J., Reyes A. D. Synaptic scaling rule preserves excitatory-inhibitory balance and salient neuronal network dynamics //Nature Neuroscience. 2016. V. 19. N. 12. P. 1690–1696.
4. van Vreeswijk C., Sompolinsky H. Chaos in neuronal networks with balanced excitatory and inhibitory activity //Science. 1996. V. 274. N. 5293. P. 1724.
5. Rossant C. et al. Sensitivity of noisy neurons to coincident inputs //Journal of neuroscience. 2011. V. 31. N. 47. P. 17193–17206.
6. Интернет-адрес: <http://www.nest-simulator.org>
7. Güttig R. et al. Learning input correlations through nonlinear temporally asymmetric Hebbian plasticity //Journal of Neuroscience. 2003. V. 23. N. 9. P. 3697–3714.
8. Yao H. et al. Rapid learning in cortical coding of visual scenes //Nature neuroscience. 2007. V. 10. N. 6. P. 772–778.

## МУЛЬТИСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СЕМЕЙСТВА СКИРМА

**А. В. Самойленко**

Как известно, в теории поля многие классические нелинейные модели имеют солитонные решения, которые последние несколько десятилетий активно изучаются в контексте различных физических приложений.

Планарная модель Скирма вызывает достаточно большой интерес, так как эта простая теория находит множество физических применений. Действительно, она впервые была разработана как модификация моделей Гейзенбергского типа взаимодействующих спинов. Некоторые модификации планарной модели Скирма с членом взаимодействия Дзялошинского—Мория были предложены для моделирования центрально несимметричных ферромагнитных планарных структур. Эти солитонные состояния предполагается использовать в технологиях хранения данных и в быстроразвивающейся, в настоящее время, спинтронике.

Планарные скирмионы возникают как коллективные степени свободы при описании топологического квантового эффекта Холла. В этом случае скирмионо-подобные состояния спарены с потоками магнитного поля и имеют электрический заряд. Следовательно, чтобы изучить топологические свойства планарных квантовых систем необходимо рассмотреть обобщение низко-размерной модели Скирма, включающее в себя калибровочные электрическое и магнитное поля.

Исходя из этого были исследованы мультисолитонные решения модели Максвелла-Черна-Саймонса-Скирма в (2+1) измерениях без дополнительных ограничений на их симметрию с лагранжианом:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{c}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}A_\rho + \frac{1}{2}D_\mu\vec{\phi} \cdot D^\mu\vec{\phi} - \frac{1}{4}(D_\mu\vec{\phi} \times D_\nu\vec{\phi})^2 - V(\vec{\phi}), (1)$$

Так как данной модели выбор потенциала критичен и его форма сильно влияет на структуру решения планарных скирмионов, было рассмотрено два вида потенциала: слабо связывающий потенциал [1]  $V = \mu^2[\lambda(1 - \phi_3) + (1 - \lambda)(1 - \phi_3)^4]$  и сильно связывающий потенциал с двойным вакуумом ("easy-axis" potential)  $V = \mu^2(1 - \phi_3^2)$ . Такой выбор потенциалов аргументирован тем, что при отсутствии калибровочного поля отдельные составляющие мультисолитонных конфигураций в модели с первым потенциалом визуально разделены, в то время как в модели с потенциалом с двойным вакуумом решения не теряют вращательную симметрию для любого значения топологического заряда.

Все расчёты были проведены для мультисолитонных конфигураций с топологическими зарядами до  $Q=5$ . Была изучена зависимость структуры решений, энергии, момента импульса, электрического и магнитного полей от значения калибровочной постоянной  $g$  и электрического потенциала  $A_0 = \omega$  на пространственной бесконечности.

Численный алгоритм был основан на алгоритмах представленных в [2]. Начальное приближение заданного топологического заряда выбиралось через анзац рационального отображения и потом изменялось с тем чтобы минимизировать функционал  $-L$  относительно переменных  $A_1, \vec{\phi}$ , и одновременно функционал  $L$  относительно  $A_0$ . Этот метод минимизации

ции был разработан для того, чтобы найти решения для знаконеопределённого функционала  $L$ . Расчёты были проведены на квадратной решётке с типичным размером  $200^2, 150^2, 100^2$  узлов и расстоянием между ними  $dx = 0.15, 0.1$ . Они выполнялись на кластере HIBRILIT (ОИЯИ, Дубна).

Было показано, что электромагнитные силы в системе могут сильно влиять на структуру мультисолитонных конфигураций. В частности, вращательная инвариантность нарушается из-за сильного электрического отталкивания между составляющими.

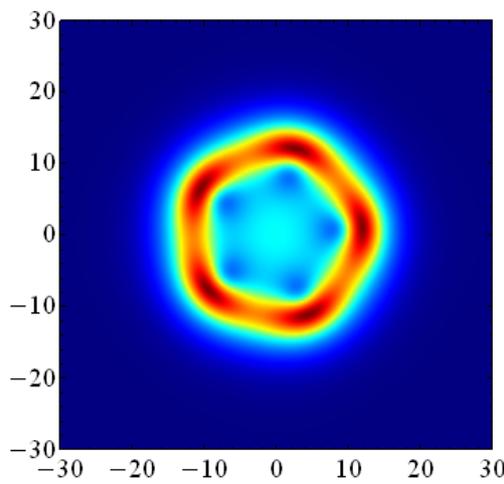


Рис. 1. Плотность энергии с диэдральной симметрией  $Q = 5$   
 $g = 0.3, \omega = -0.9, \mu^2 = 0.1, c = 1$

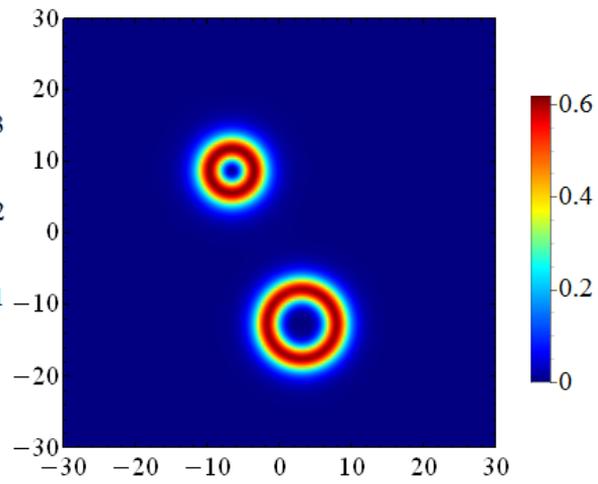


Рис. 2. Плотность энергии отделившихся скирмионов  $Q = 2, 3$   
 $g = 0.3, \omega = 0.9, \mu^2 = 0.1, c = 1$

Присутствие члена Черна-Саймонса, нарушающего симметрии пространственной и временной инверсии, приводит к генерации электрического заряда и магнитного потока конфигурации [3]. В случае слабо связывающего потенциала при фиксированном значении калибровочной константы  $g = 0.3$  и при обычном выборе параметров потенциала солитоны остаются существенно отделены друг от друга для всего множества значений электрического потенциала. Во втором случае, при отрицательных  $\omega \rightarrow -1$ , симметрия нарушается до диэдральной группы (Рис. 1). Но при положительных  $\omega$  вращательно-инвариантная конфигурация остаётся глобальным минимумом энергии для солитонов вне зависимости от их топологического заряда, а локальный минимум состоит из явно отделённых друг от друга вращательно инвариантных солитонов (Рис. 2).

С другой стороны, увеличение значения калибровочной константы связи  $g$  может привести к другим конфигурациям и восстановлению вращательной инвариантности солитонов. Стоит отметить, что в пределе сильной связи, как суммарный магнитный поток, так и электрический

заряд, который связан с членом Черна-Саймонса, начинают эффективно квантоваться, хотя они не имеют топологической природы. Был найден новый тип электрически заряженных  $Q = 4$  мультисолитонных решений, имеющих более компактную форму с  $D_4$  симметрией.

Больше 40 лет назад Фаддеев впервые представил  $O(3)$  сигма модель с членом Скирма. В этой модели топологические солитоны имеют вид переплетённых трубок или нитей, стабилизированных топологическим зарядом Хопфа. Подобные конфигурации могут представлять собой нетривиальные узлы, несколько связанных колец или одиночные кольца [4].

Несмотря на то, что модель в первую очередь представляет математический интерес, она имеет несколько применений в различных полевых моделях: она как и оригинальная модель Скирма, может быть связана с разложением эффективной киральной теории, получаемой как низкоэнергетический предел квантовой хромодинамики, поэтому она потенциально может применяться для описания динамики адронных состояний.

Как было показано в недавней статье, намагниченность в киральных ферромагнитных жидкостях может приводит к формированию стабильных хопфионных конфигураций.

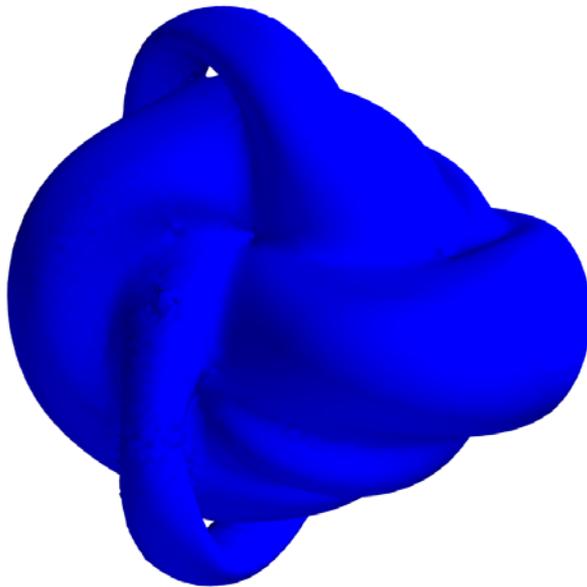


Рис. 3. Изоповерхность плотности энергии  $\rho_E = 15$ :  
 $c_2 = 0.5, c_4 = 1, m = 4, c = 1/3$  и  $Q = 5$

Решения этого типа возникают в двухкомпонентных Бозе-Эйнштейновских конденсатах и нелинейных оптических средах.

В данной модели полевая конфигурация, так же как и в случае планарной модели Скирма, задаётся триплетом скалярных полей  $\vec{\phi}$ , лежащих на сфере  $S^2$ . Область определения представляет собой трёхмерное пространство  $R^3$ , а  $O(3)$  инвариантная энергия задаётся формулой:

$$E = c_2 \partial_i \vec{\phi} \cdot \partial_i \vec{\phi} + \frac{c_4}{2} (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi})^2 + m^2 (\phi_1 - c)^2, \quad (2)$$

При исследовании этой модели было получено, что на масштабах энергий, сравнимых с максимумом потенциала, изоповерхность плотности энергии имеет форму кривых  $\phi_1 = \pm 1$ , т.е. разделяется на трубки (Рис. 3).

Это соответствует тому, что при не очень больших значениях плотностей энергии потенциал вносит значительный вклад в суммарную плотность, которая концентрируется около его максимума, т.е. при  $\phi_1 = \pm 1$ .

Можно предложить другую интерпретацию данного явления. Как известно, хопфион можно представить как результат вращения вертикальной плоскости, в которой находится планарный скирмион, последний может менять положение или ориентацию для разных углов поворота. Тогда разделение хопфиона на более мелкие трубки соответствует тому, что скирмионы разделяются на составляющие с дробным топологическим зарядом.

Было показано, что изменением параметра потенциала  $c$  можно получить различные трубки плотности энергии: при  $c=0$  они имеют одинаковую толщину, а при  $c=1/3$  одна из них тоньше и имеет внутри себя меньшее максимальное значение плотности энергии.

Показано, что не только энергия меняет свой вид, но и полевая конфигурация также претерпевает изменение в отличие от обычной модели без потенциала. В частности, для хопфионов  $Q = 5, 6, 7$  были получены конфигурации типа "трилистник" (в обычной модели он встречается только для  $Q = 7$ ). Было обнаружено, что хопфион  $Q = 5$ , представленный на Рис. 3, характеризуется двумя типами кривых одновременно: линк (1,2) и торический узел (3,2).

В связи с этим была предложена новая классификация решений, включающая в себя тип обеих кривых, общий вид которых  $Q(X, Y)$ .

Подробное описание полученных результатов будет опубликовано [5].

### Литература

1. *P. Salmi, P. Sutcliffe* Aloof baby skyrmions // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2014. Vol. 48, №3, P. 035401.
2. *A. Samoilenka, Ya Shnir* Gauged multisoliton baby skyrme model // Physical Review D. 2016. Vol. 93, №6. P.065018.
3. *Yu. Loginov* Rotating skyrmions of the (2+1)-dimensional skyrme gauge model with a Chern-Simons term// Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2014. Vol. 118, № 2. P. 217–226.
4. *P. Sutcliffe*, Knots in the Skyrme-Faddeev model // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences Vol. 463. 2007. P. 3001–3020.
5. *A. Samoilenka, Ya. Shnir* Fadeev-skyrme model with potential  $m^2(\vec{\phi} \cdot \vec{n} - c)^2$  // to be published – 2017.