ТРЕУГОЛЬНО ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

И. С. Терлиженко

Целью настоящей работы является исследование зависимости между локальными и глобальными свойствами графов. В рамках этого направления введён в рассмотрение класс треугольно локально связных графов, а также некоторые его обобщения – треугольно локально n-связные графы и k-локально n-связные графы. Понятие треугольно локальной связности является естественным расширением таких известных понятий, как локальная связность [1, 2] и рёберно локальная связность [3].

Получены достаточные условия в терминах степеней вершин для принадлежности произвольного графа классу треугольно локально связных графов. Установлено, что задача о гамильтоновом цикле является NP-полной в этом классе. Показано, что за некоторыми исключениями связные треугольно локально связные $K_{1,3}$-свободные графы являются гамильтоновыми и детально описаны все негамильтоновы исключения.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ

Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [4].

Граф называется локально связным [1], если окружение каждой его вершины порождает связный подграф. Граф называется рёберно локально связным [3], если окружение каждого его ребра порождает связный подграф. Граф называется треугольно локально связным, если он содержит треугольники и окружение каждого его треугольника порождает связный подграф. В общем случае граф называется k-локально n-связным, если он содержит клики K_k и окружение каждой такой клики порождает n-связный подграф.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Теорема 1. Пусть G – граф порядка p, для любой пары x и y вершин которого выполняется неравенство $\deg x + \deg y > 4p/3$. Тогда G – треугольно локально связный граф.

Следствие 1. Если G – граф порядка p и $\delta(G) > 2p/3$, то G – треугольно локально связный граф.

Результаты теоремы 1 не могут быть улучшены в смысле ограничения на попарную сумму степеней вершин. Рассмотрим пример. Пусть граф G порядка $p = 3m + 3$ получен из полного графа K_p следующим образом: вершины разбиты на 4 подграфа $G_1 = K_3$, $G_2 = G_3 = G_4 = K_m$ и удалены все рёбра между вершинами подграфов G_1 и G_4, и между вершинами подграфов G_2 и G_3 (рис. 1). Понятно, что для любой пары x и y вершин полученного графа выполняется неравенство $\deg x + \deg y \geq 4p/3$, но окружение треугольника G_1 не связно.

В дальнейшем после теорем 2, 3 и 4 приведём пример графа, не позволяющий ослабить ограничения в условиях этих теорем.

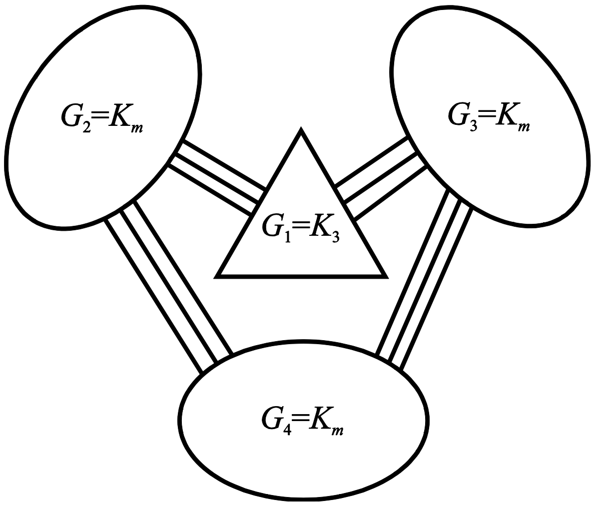


Рис. 1. Контрпример

Теорема 2. Пусть G – граф порядка $p = 3k$, содержащий не более $2k$ вершин степени $2k$, а степени остальных вершин превосходят $2k$. Тогда G – треугольно локально связный граф.

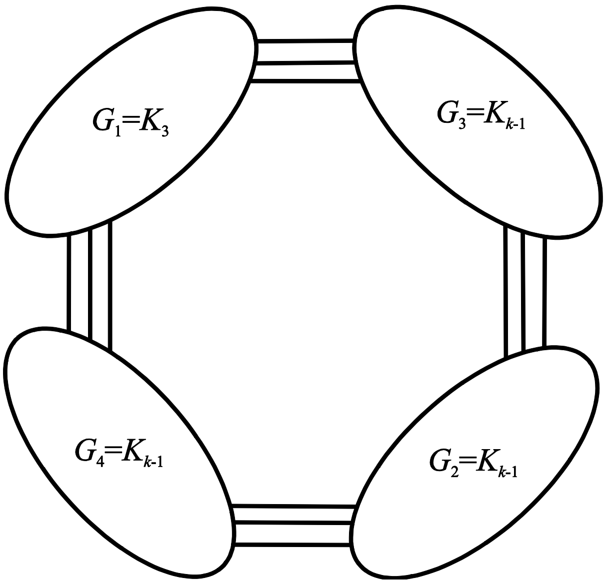


Рис. 2. Контрпример

Теорема 3. Пусть G – граф порядка $p = 3k + 2$, содержащий не более $k+1$ вершин степени $2k+1$, а степени остальных вершин превосходят $2k+1$. Тогда G – треугольно локально связный граф.

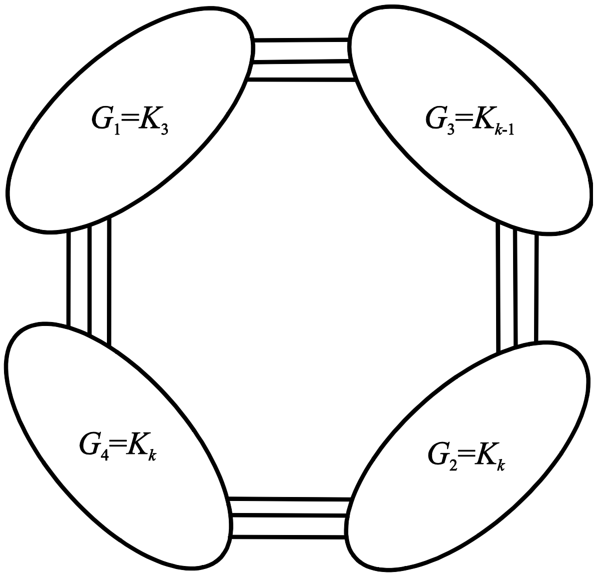


Рис. 3. Контрпример

Теорема 4. Пусть G – граф порядка $p = 3k + 1$, содержащий не более двух вершин степени $2k$, а степени остальных вершин превосходят $2k$. Тогда G – треугольно локально связный граф.

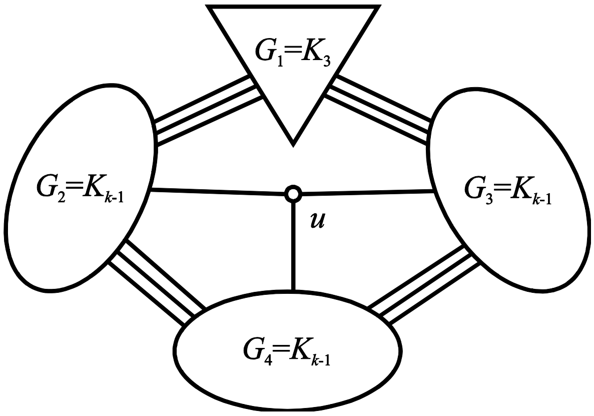


Рис. 4. Контрпример

Теорема 5. Пусть G – граф порядка p, для любой пары x и y вершин которого выполняется неравенство $\deg x + \deg y > 2(2p + n)/3$, где $1 \le n \le p - 4$. Тогда G – треугольно локально n-связный граф.

Теорема 6. Пусть G – граф порядка p, для любой пары x и y вершин которого выполняется неравенство $\deg x + \deg y > 2(2p + n)/3 + (k - 3)$, где $3 \le k \le p - 2$ и $1 \le n \le p - (k + 1)$. Тогда G – k-локально n-связный граф.

3. ЗАДАЧА О ГАМИЛЬТОНОВОМ ЦИКЛЕ

Теорема 7. Задача о гамильтоновом цикле является NP-полной в классе планарных треугольно локально связных графов.

Доказательство этой теоремы можно провести с помощью полиномиального сведения к рассматриваемой задаче задачи о гамильтоновом цикле для планарного кубического графа (рис. 5).

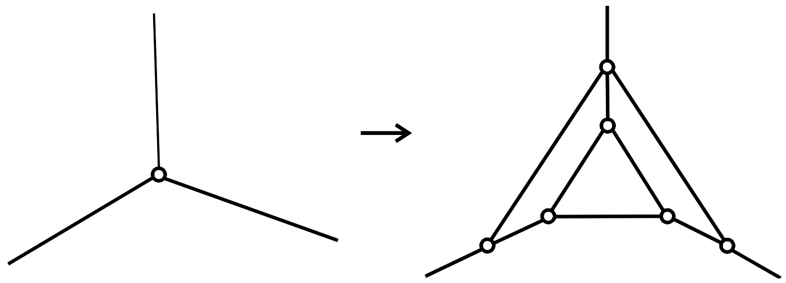
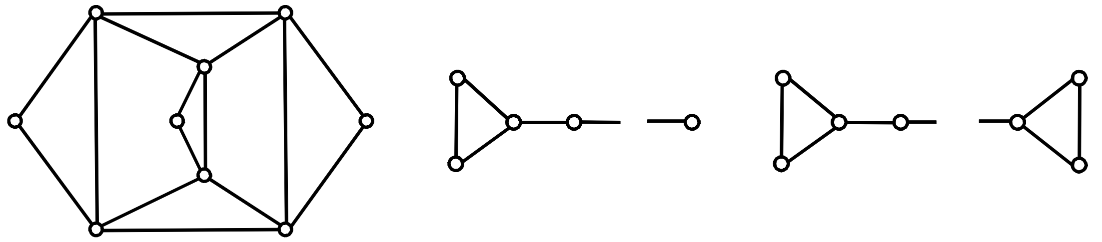


Рис. 5. Фрагмент сведения

Теорема 8. Если G – связный, треугольно локально связный, $K_{1,3}$-свободный граф, то выполняется одно из утверждений: 1) G – гамильтонов; 2) $G \cong P_n, n > 1$ или может быть получен из P_n присоединением к одной (обеим) концевой вершине треугольника (треугольников соответственно) (рис. 6); 3) $G \cong H$ (рис. 6).



H G_1 G_2

Рис. 6. Негамильтоновы треугольно локально связные $K_{1,3}$-свободные графы

Следствие 2. Любой двусвязный треугольно локально связный $K_{1,3}$-свободный граф, отличный от H (рис. 6), гамильтонов.

Литература

1. *Chatrand G., Pippert R. E.* Locally connected graphs. // Časopis pro pěstování matematiky. 1974. Vol. 99. P. 158-163.
2. *Vanderjagt D. W.* Sufficient conditions for locally connected graphs. // Časopis pro pěstování matematiky. 1974. Vol. 99. P. 400-404.
3. *Kulkarni K. H.* Sufficient conditions for edge-locally connected and n-connected graphs. // Časopis pro pěstování matematiky. 1981. Vol. 106. P. 112-116.
4. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов, М., 2009.